# فصل چهارم

# خطوط تأثیر و نیروهای بحرانی طرح

## ۴ـ۱ مقدمه

مهندسان به‌ندرت با بارهایی که موقعیت آنها ثابت است، سروکار دارند و تقریباً تمام سازه‌های ساختمانی تحت تأثیر نیروهای متحرک قرار دارند. نمونهٔ بارز این سازه‌ها، پل‌های جاده‌ها می‌باشند که بارهای متحرک ناشی از عبور وسایل نقلیه را تحمل می‌نمایند.

اصولاً هر قسمتی از سازه، برای حالت بحرانی نیروهای داخلی که امکان دارد در آن ایجاد گردد، طرح و محاسبه می‌شود. لذا مهندس محاسب می‌باید نیروها را در چنان موقعیت نامساعدی در نظر بگیرد که باعث به‌وجود آمدن وضع بحرانی در مقطع مورد مطالعه شود. بدیهی است موقعیت‌های نامساعد برای وارد آوردن نیروها برای مطالعهٔ قسمتی از سیستم، برای قسمت‌های دیگر سیستم، موقعیت نامساعد نمی‌باشد. برای مثال حداکثر تنش در عضوی از خرپای پل ممکن است هنگامی ایجاد گردد که در سراسر پل بار وسایل نقلیه در نظر گرفته شوند، در صورتی که حداکثر تنش در عضوی دیگر ممکن است با درنظر گرفتن بار وسایل نقلیه در قسمتی از پل به‌دست آید.

در بعضی موارد تشخیص موقعیت نامساعد نیروها برای ایجاد حالت بحرانی در یک مقطع مشخص به‌سادگی میسر می‌باشد. لیکن در بسیاری از موارد دیگر این امر ساده نبوده و لازم است به‌نمودار و یا ملاکی برای تعیین موقعیت‌های نامساعد نیروها متوسل شویم. خطوط تأثیر[1] برای این منظور مؤثرترین وسیله می‌باشند که در این فصل به‌شرح آنها می‌پردازیم.

1- influence line

Scanned by CamScanner

## ۴ـ۲ تعریف خط تأثیر

برای اینکه بتوانیم یک تعریف فیزیکی از خط تأثیر در ذهن دانشجو به‌وجود آوریم، ابتدا لازم است مقدمه‌ای ذکر نماییم. همان‌طور که می‌دانیم، هدف ما از تحلیل یک سازه، تعیین نیروهای واکنش تکیه‌گاهی، نیروهای داخلی (شامل نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی) و در نهایت تعیین تنش‌ها و تغییر شکل‌ها می‌باشد. برای عمومیت دادن و حفظ اختصار در تعاریف، از این به‌بعد کمیت‌های فوق را تابع[۲] می‌نامیم.

مقدار یک تابع (که می‌تواند واکنش تکیه‌گاهی، نیروی برشی، تغییر شکل و یا غیره... باشد) در یک سازهٔ مشخص، بستگی به‌موارد زیر دارد:

۱ ـ محل مورد نظر برای مطالعهٔ تابع

۲ ـ مقدار نیروی مؤثر

۳ ـ موقعیت نیروی مؤثر

اگر محل مورد نظر برای مطالعهٔ تابع را یک نقطهٔ مشخص فرض نماییم (مثلاً یک تکیه‌گاه مشخص از سازه، مقطعی مشخص از تیر، عضوی مشخص از خرپا) و مقدار نیروی مؤثر را واحد در نظر بگیریم، تنها عامل متغیر موقعیت نیروی مؤثر خواهد بود.

حال اگر نیروی مؤثر واحد را در موقعیت‌های مختلفی روی سازه قرار دهیم و برای هر موقعیت، مقدار تابع را در مقطع مورد نظر تعیین نماییم و مقدار محاسبه شده را به‌صورت مختصات y محل تأثیر نیرو، در روی نمودار سازه در نظر بگیریم، از وصل‌کردن این نقاط، خط تأثیر تابع مورد مطالعه، در مقطع مورد نظر به‌دست می‌آید. بنابراین می‌توان گفت که خط تأثیر نمودار است که عرض نقطهٔ دلخواهی نظیر A از آن، نشان‌دهندهٔ حالت و مقدار یک تابع در محل مشخصی از سازه، وقتی که بار واحد در نقطهٔ A قرار می‌گیرد، می‌باشد.

خطوط تأثیر معمولاً برای تعیین موقعیت‌های نامساعد بارهای زنده و محاسبهٔ تنش‌های حداکثر به‌کار برده می‌شوند. روش ترسیم این‌گونه نمودارها بسیار ساده می‌باشد. به‌این ترتیب که برای موقعیت‌ها مختلف بار واحد در روی سازه، مقادیر مختلف تابع مورد مطالعه را محاسبه نموده و در موقعیت‌ها بار واحد نشان داده و سپس نقاط را به‌هم متصل می‌نماییم. دانشجو باید تصویر ذهنی از حرکت بار واحدی در روی سازه داشته باشد و سعی نماید درک کند که تغییرات تابع مورد مطالعه در نتیجهٔ حرکت بار واحد، چگونه است.

Scanned by CamScanner

## ۴ـ۳ خط تأثیر واکنش‌های تکیه‌گاهی تیر ساده

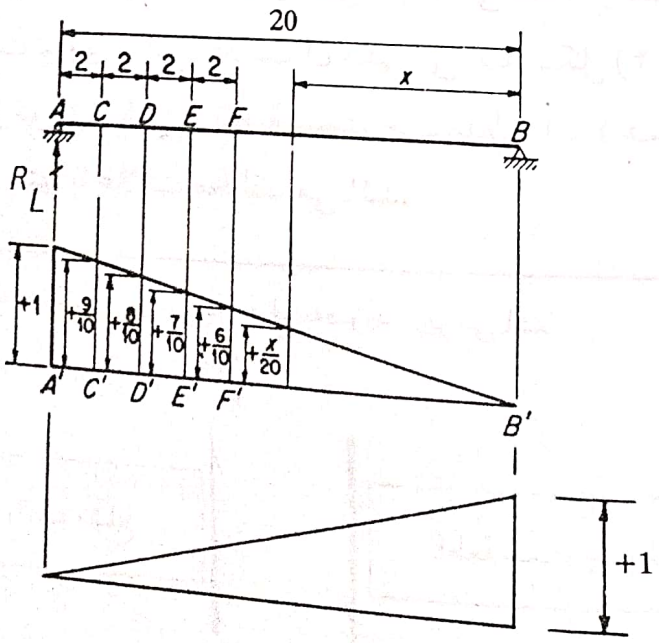
خط تأثیر واکنش‌های تکیه‌گاهی تیر سادهٔ شکل ۴ ـ ۱ ـ الف، در اشکال ۴ ـ ۱ ـ ب و پ، نشان داده شده است. شکل ۴ ـ ۱ ـ ب، مربوط به‌واکنش تکیه‌گاهی سمت چپ ($R_L$) و شکل ۴ ـ ۱ ـ پ، مربوط به‌واکنش تکیه‌گاهی سمت راست ($R_R$) می‌باشد. اینک به‌چگونگی رسم خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی سمت چپ (شکل ۴ ـ ۱ ـ ب) می‌پردازیم:

ابتدا تیر اصلی را به‌فواصل یک‌دهم دهانه (هر فاصله مساوی ۲ متر) تقسیم می‌نماییم. هنگامی که بار واحد مستقیماً بر تکیه‌گاه سمت چپ وارد می‌آید، $R_L=1$ می‌باشد. هنگامی که بار واحد به‌فاصلهٔ ۲ متر در سمت راست تکیه‌گاه تأثیر می‌نماید، $R_L=0.90$ ، و هنگامی که بار واحد به‌فاصلهٔ ۴ متر در سمت راست تکیه‌گاه قرار می‌گیرد، $R_L=0.80$ ، می‌باشد و سرانجام هنگامی که بار واحد در روی تکیه‌گاه سمت راست قرار می‌گیرد، $R_L=0$ می‌شود. مقادیر $R_L$ در شکل ۴ ـ ۱ ـ ب، برای فواصل ۲ متری در نتیجهٔ حرکت بار واحد در طول تیر نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که تغییرات $R_L$ خطی می‌باشد.

خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی سمت راست ($R_R$) نیز به‌طریقی مشابه رسم گردیده است. بدیهی است که برای هر موقعیت بار، مجموع مختصات دو خط تأثیر برای واکنش‌های تکیه‌گاهی بایستی برابر واحد باشد.

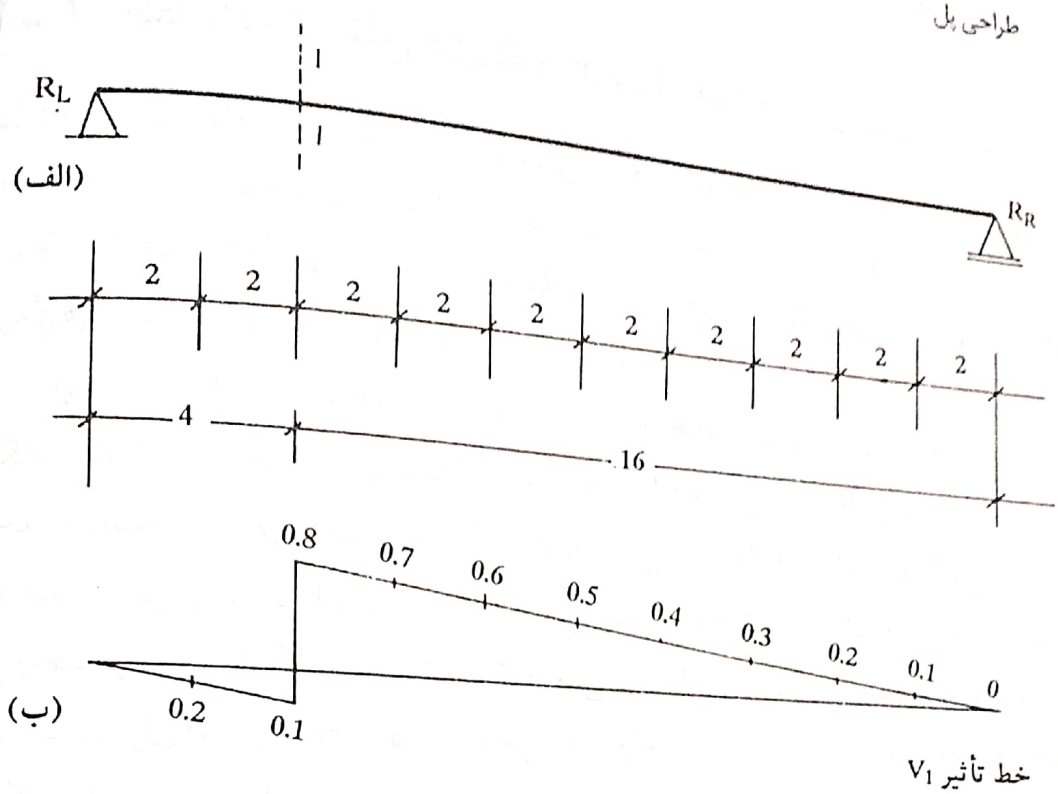
## ۴ـ۴ خط تأثیر نیروی برشی تیر ساده

خط تأثیر نیروی برشی در مقطع ۱ ـ ۱ از تیر سادهٔ شکل ۴ ـ ۲ ـ الف در شکل ۴ ـ ۲ ـ ب نشان داده




شکل ۴ ـ ۱

Scanned by CamScanner

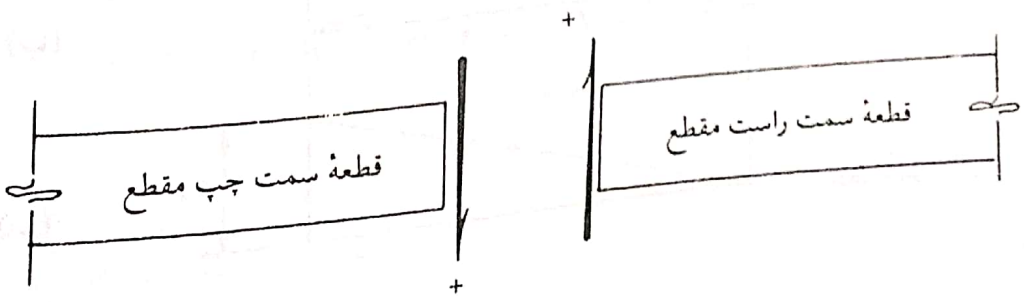



شکل ۴ ـ ۲ خط تأثیر برای نیروی برشی تیر ساده.

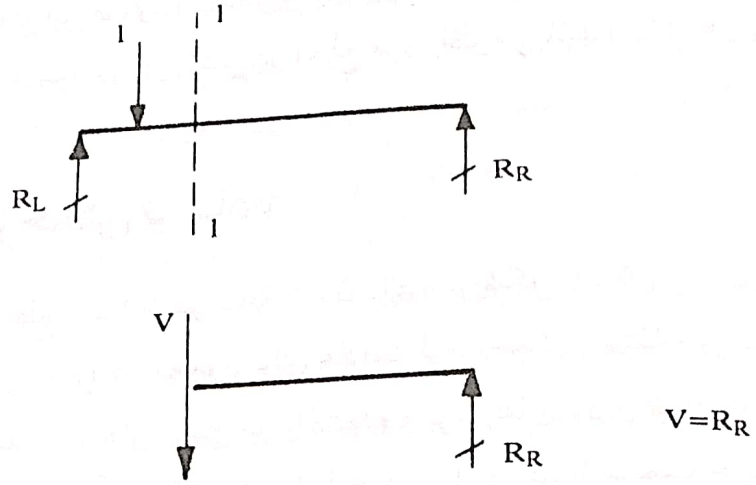
شده است. برای رسم این خط تأثیر از قرارداد معمول برای علامت نیروی برشی استفاده می‌نماییم*. اکنون به‌شرح چگونگی رسم خط تأثیر مقطع ۱ ـ ۱ با حرکت بار واحد از سمت چپ به‌راست می‌پردازیم:

بدیهی است هنگامی که بار واحد بر تکیه‌گاه چپ وارد می‌آید در هیچ مقطعی نیروی برشی ایجاد نمی‌گردد. هنگامی که بار واحد در روی نقاطی واقع در سمت چپ مقطع ۱ ـ ۱ قرار می‌گیرد، نیروی برشی در مقطع مزبور، مساوی و مخالف واکنش تکیه‌گاهی سمت راست تیر خواهد بود که با توجه به‌قرارداد جهت مثبت نیروی برشی، علامت آن منفی می‌باشد شکل (۴ ـ ۳). بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که خط تأثیر نیروی برشی در ناحیهٔ سمت چپ مقطع ۱ ـ ۱ همان خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی سمت راست، منتها با علامت مخالف می‌باشد.

* طبق قرارداد فوق، جهت مثبت نیروی برشی در مقطع به‌صورت زیر می‌باشد:




Scanned by CamScanner

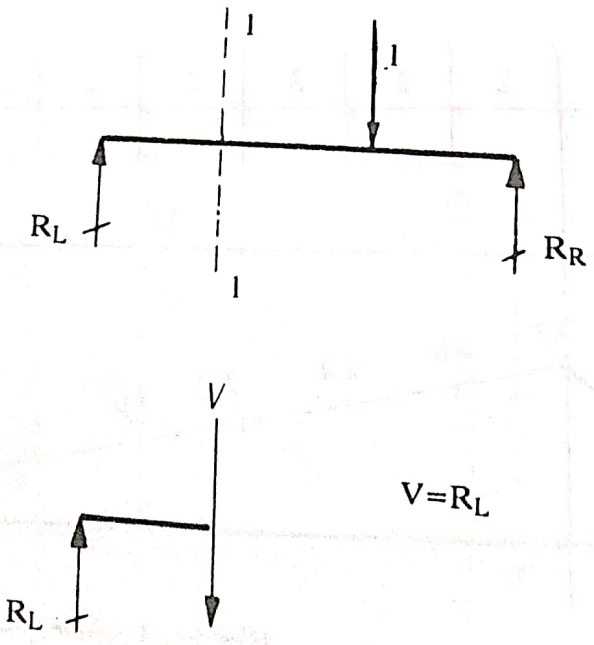



شکل ۴ ـ ۳ برای واحد در سمت چپ مقطع ۱ ـ ۱.

حال اگر بار واحد از سمت چپ مقطع ۱ ـ ۱ به‌سمت راست آن انتقال یابد، مشاهده می‌گردد که نیروی برشی در مقطع مزبور، مساوی و مخالف واکنش تکیه‌گاهی سمت چپ تیر می‌باشد که با توجه به‌قرارداد جهت مثبت نیروی برشی، علامت آن مثبت است (شکل ۴ ـ ۴). بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که خط تأثیر نیروی برشی در ناحیهٔ سمت راست مقطع ۱ ـ ۱ همان خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی سمت چپ با همان علامت می‌باشد.

با در نظر گرفتن بار واحد به‌فاصلهٔ بی‌نهایت کوچک در طرف چپ و راست مقطع ۱ ـ ۱، دیده می‌شود که در مقطع ۱ ـ ۱ یک تغییر ناگهانی به‌اندازهٔ واحد در مقدار نمودار تأثیر وجود دارد.

اگر در مسئله‌ای امکان استفاده از تکنیکی که در این مثال برای رسم خط تأثیر مورد استفاده قرار




شکل ۴ ـ ۴ بار واحد در سمت راست مقطع ۱ ـ ۱

Scanned by CamScanner

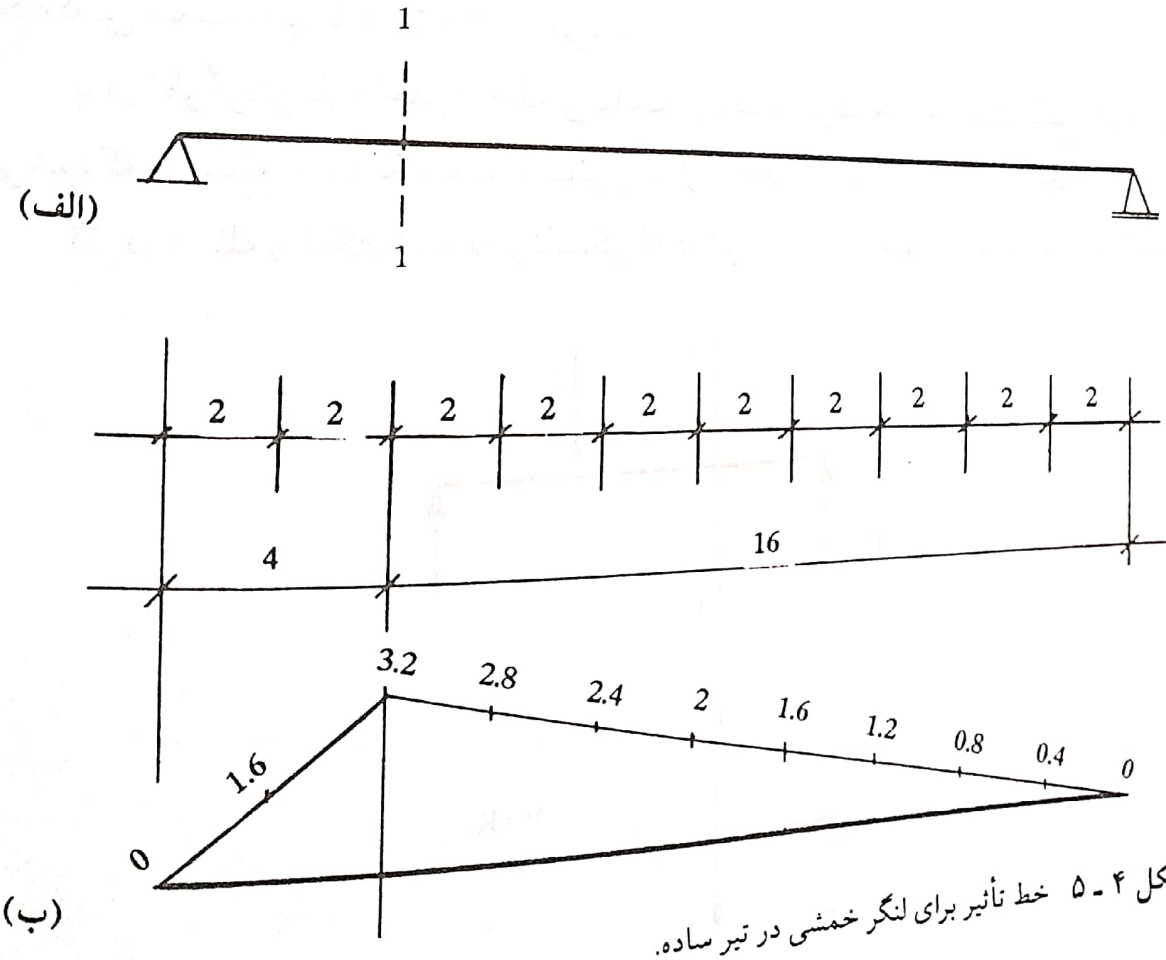
گرفت، وجود نداشته باشد، در این صورت ساده‌ترین روش برای رسم خط تأثیر، قرار دادن بار واحد در چندین نقطهٔ مناسب و محاسبهٔ نیروی برشی در مقطع مورد نظر می‌باشد (شکل ۴ - ۲ - ب)

## ۴ - ۵ خط تأثیر لنگر خمشی تیر ساده

خط تأثیر لنگر خمشی در مقطع ۱ - ۱ از تیر سادهٔ ۴ - ۵ - الف در شکل ۴ - ۵ - ب نشان داده شده است. برای رسم این خط تأثیر از قرارداد معمول برای علامت لنگر خمشی استفاده می‌نماییم. طبق قرارداد، لنگری مثبت می‌باشد که بارهای پایین تیر راکشیده و بر تارهای بالای تیر فشار وارد سازد. اکنون به‌شرح چگونگی رسم خط تأثیر مقطع ۱ - ۱ با حرکت بار واحد از سمت چپ به‌راست، می‌پردازیم.

با تقسیم طول دهانه به‌فواصل یک دهم دهانه (۲ متری) و قرار دادن بار واحد در هر یک از آن نقاط، لنگر خمشی را در مقطع ۱ - ۱ محاسبه نموده و خط تأثیر لنگر خمشی مقطع ۱ - ۱ را رسم می‌نماییم.

برای رسم خط تأثیر لنگر خمشی در تیر ساده، از یک روش استدلالی نیز می‌توان استفاده




شکل ۴ - ۵ خط تأثیر برای لنگر خمشی در تیر ساده.

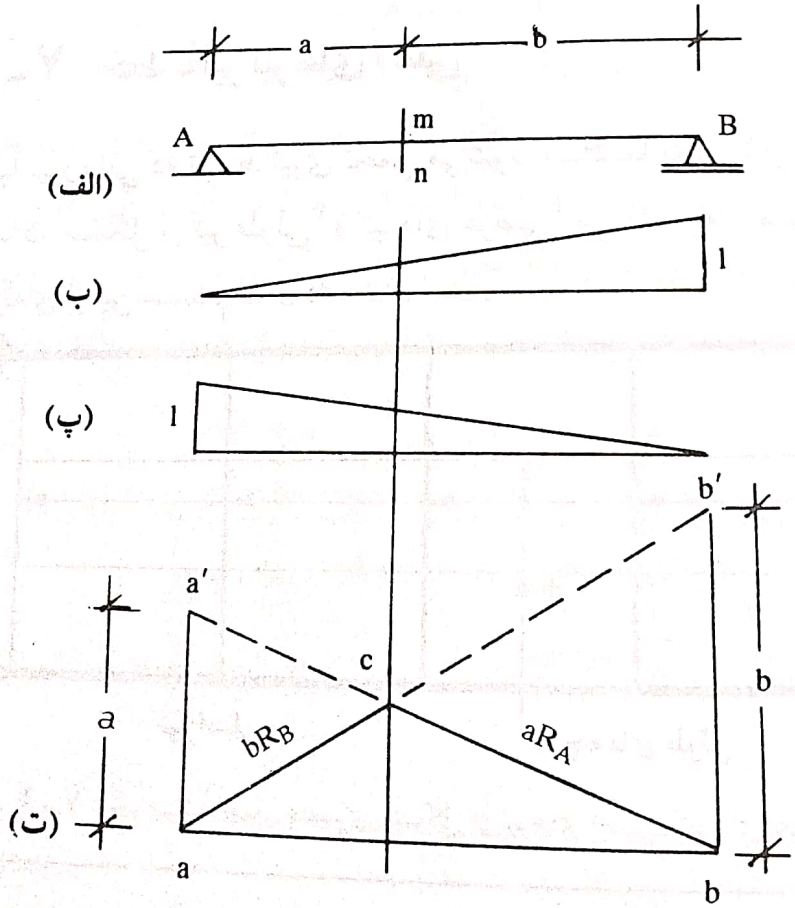
Scanned by CamScanner

نمود. با توجه به‌شکل ۴ - ۶ می‌توان دریافت، موقعی که بار P در سمت راست مقطع mn قرار دارد، لنگر خمشی در مقطع مزبور برابر $R_A a$ می‌باشد. همین‌طور موقعی که بار P در سمت چپ مقطع mn قرار می‌گیرد، لنگر خمشی در مقطع مزبور برابر $R_B b$ است. لنگر خمشی در هر دو حالت مثبت می‌باشد. بنابراین همانند حالت نیروی برشی، خط تأثیر لنگر خمشی در مقطع mn مستقیماً از خطوط تأثیر واکنش‌های $R_A$ و $R_B$ به‌دست می‌آید. برای قسمتی از تیر واقع در سمت راست مقطع مزبور، کافی است عرض‌های خط تأثیر $R_A$ را در a ضرب نماییم. به‌طریق مشابه، برای قسمتی از تیر واقع در سمت چپ مقطع mn، عرض‌های خط تأثیر $R_B$ در b ضرب می‌شود. بدین ترتیب خط تأثیر لنگر خمشی در مقطع mn، مثلث abc مطابق شکل ۴ - ۶ - ت می‌باشد.

## ۴-۶ رسم خطوط تأثیر تیرها

در سازه‌های معین ایستایی، خطوط تأثیر برای تمام توابع (به‌استثنای تغییر شکل‌ها) به‌صورت خط مستقیم می‌باشند. برای چنین سازه‌هایی خطوط تأثیر را می‌توان توسط یکی از روش‌های زیر ترسیم نمود:

۱ - بار واحد را در چندین نقطهٔ متوالی در روی سازه قرار دهید و برای هر موقعیت بار واحد،




شکل ۴ - ۶

Scanned by CamScanner

مقدار تابع مورد نظر را محاسبه نمایید. بارسم مقادیر به‌دست آمده، خط تأثیر تابع مورد نظر به‌دست می‌آید.

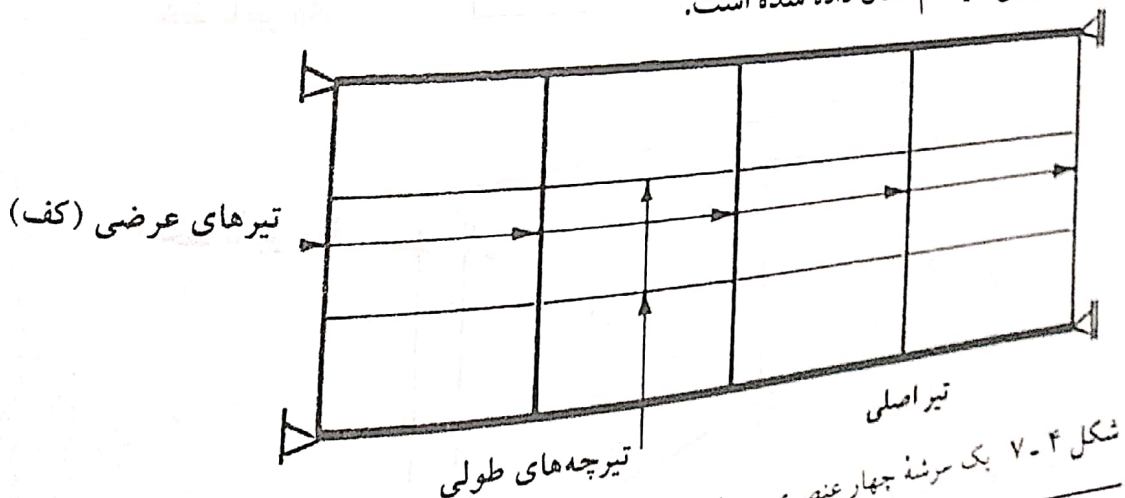
۲ ـ فاصلهٔ بار واحد را از یک مبدأ دلخواه مساوی x فرض نمایید و مقدار تابع را برحسب فاصلهٔ متغیر x محاسبه نمایید. نتیجه،رابطه‌ای برحسب x خواهد شد که نشان‌دهندهٔ خط تأثیر تابع مورد نظر است. با عبور بار واحد از روی یک تکیه‌گاه و یا یک نقطهٔ کلیدی، رابطهٔ خط تأثیر تغییر پیدا می‌کند. متغیر x حتماً لازم نیست که از یک مبدأ ثابت در نظر گرفته شود و برحسب سهولت در طی یک مسئله ممکن است مبدأ آن را چندین بار تغییر دهیم.

۳ ـ باکسب تجربه این توانایی در محاسب به‌وجود می‌آید نقاطی راکه در آنها عدم پیوستگی و یا تغییر در شیب نمودارهای تأثیر ایجاد می‌شود، تشخیص دهد. با قرار دادن بار واحد در این نقاط کلیدی و محاسبهٔ تابع مورد نظر، چه توسط روش‌های استاتیکی و چه توسط روش‌های استدلالی، عرض تابع در نقاط کلیدی تعیین می‌گردد که با وصل کردن آنها توسط خط مستقیم، خط تأثیر مورد نظر به‌دست می‌آید.

۴ ـ همان‌طور که در شکل ۴ ـ ۶ ملاحظه می‌شود، خط تأثیر نیروهای داخلی را می‌توان به‌کمک استدلال‌های استاتیکی به‌خط تأثیر واکنش‌های تکیه‌گاهی ربط داد.

## ۴ـ۷ خط تأثیر تیرهای اصلی

غالباً نیروهایی که توسط تیری تحمل می‌شود، مستقیماً به‌آن مؤثر نبوده، بلکه توسط یک سیستم کف که متشکل از تیر طولی[3] و تیرهای عرضی[4] می‌باشد به‌آن منتقل می‌گردد. در شکل ۴ ـ ۷ نمونه‌ای از این سیستم نشان داده شده است.




شکل ۴ ـ ۷ یک سرشهٔ چهار عنصری متشکل از تیرهای اصلی، تیرهای عرضی و تیرچه‌های طولی.

4– Floor bean

3– Stringer

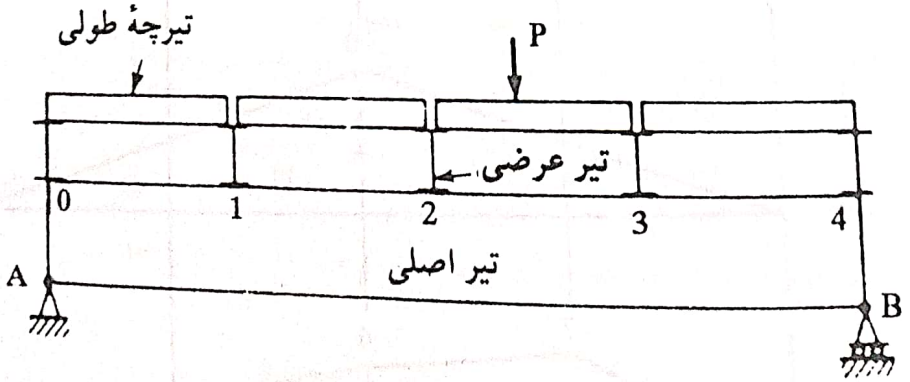
Scanned by CamScanner

بدون توجه به‌جزییات واقعی چنین سیستمی، یک شمای کلی از این سیستم در شکل ۴ ـ ۸ نشان داده شده است که در آن تیر اصلی AB[۵]، چند تیر عرضی (تیرکف) و تیرهای عرضی نیز به‌نوبهٔ خود، چند تیر طولی را حمل می‌نمایند.

قسمت‌هایی از تیر اصلی که بین دو تیر عرضی قرار دارند، نظیر ۱ ـ ۰، ۲ ـ ۱ و غیره پانل[۶] و نقاط انتهایی پانل‌ها، نقطهٔ پانلی[۷] نامیده می‌شوند. در نتیجه هر نیرویی نظیر P که بر تیر طولی وارد می‌گردد، فقط می‌تواند از طریق نقاط پانلی مربوطه به‌تیر اصلی منتقل گردد. بنابراین تحت هر شرایط بارگذاری، تیر اصلی فقط از طریق نقاط پانلی تحت بار قرار می‌گیرد. آشکار است که تقسیم یک بار بین دو نقطهٔ پانلی، هیچ اثری در روی واکنش‌های انتهایی A و B ندارد. لیکن نیروی برشی داخلی در تیر اصلی در طول یک پانل مقدار ثابت می‌باشد. بنابراین در تیرهای اصلی به‌جای استفاده از لفظ نیروی برشی در یک مقطع مشخص، از لفظ نیروی برشی پانل استفاده می‌نمایند.

حال پس از این توضیحات مقدماتی، به‌شرح خطوط تأثیر برای تیرهای اصلی می‌پردازیم. تیر اصلی نشان داده شده در شکل ۴ ـ ۹ ـ الف را که دارای ۴ پانل ۱۰ متری می‌باشد، در نظر بگیرید.

خط تأثیر واکنش‌های $R_A$ و $R_B$ تیر فوق به‌ترتیب در اشکال (ب و پ) نشان داده شده است. روش رسم خطوط تأثیر فوق، مشابه خطوط تأثیر تیر ساده‌ای به‌دهانهٔ ۴۰ متر می‌باشد، چون وجود تیرهای عرضی هیچ‌گونه تأثیری در روی واکنش‌های تکیه‌گاهی ندارد. خط تأثیر نیروی برشی برای پانل شماره ۲ ـ ۱ که با $V_{1-2}$ تعریف می‌گردد، در شکل ۴ ـ ۹ ـ ت، نشان داده شده است. وقتی که بار واحد در پانل ۱ ـ ۰ قرار دارد، مشاهده می‌کنیم که $V_{1-2}$ مساوی $R_B$ منتها با علامت مخالف است و وقتی بار واحد بین نقاط ۲ و ۴ قرار دارد، $V_{1-2}$ مساوی $R_A$ می‌باشد. وقتی که بار واحد بین دو نقطهٔ ۱ و ۲ حرکت می‌کند، تغییرات $V_{1-2}$ خطی خواهد بود. این موضوع در تمام مواردی که اتصال تیرهای طولی به‌تیرهای عرضی، به‌صورت ساده می‌باشد، صحت دارد. اثبات این ادعا



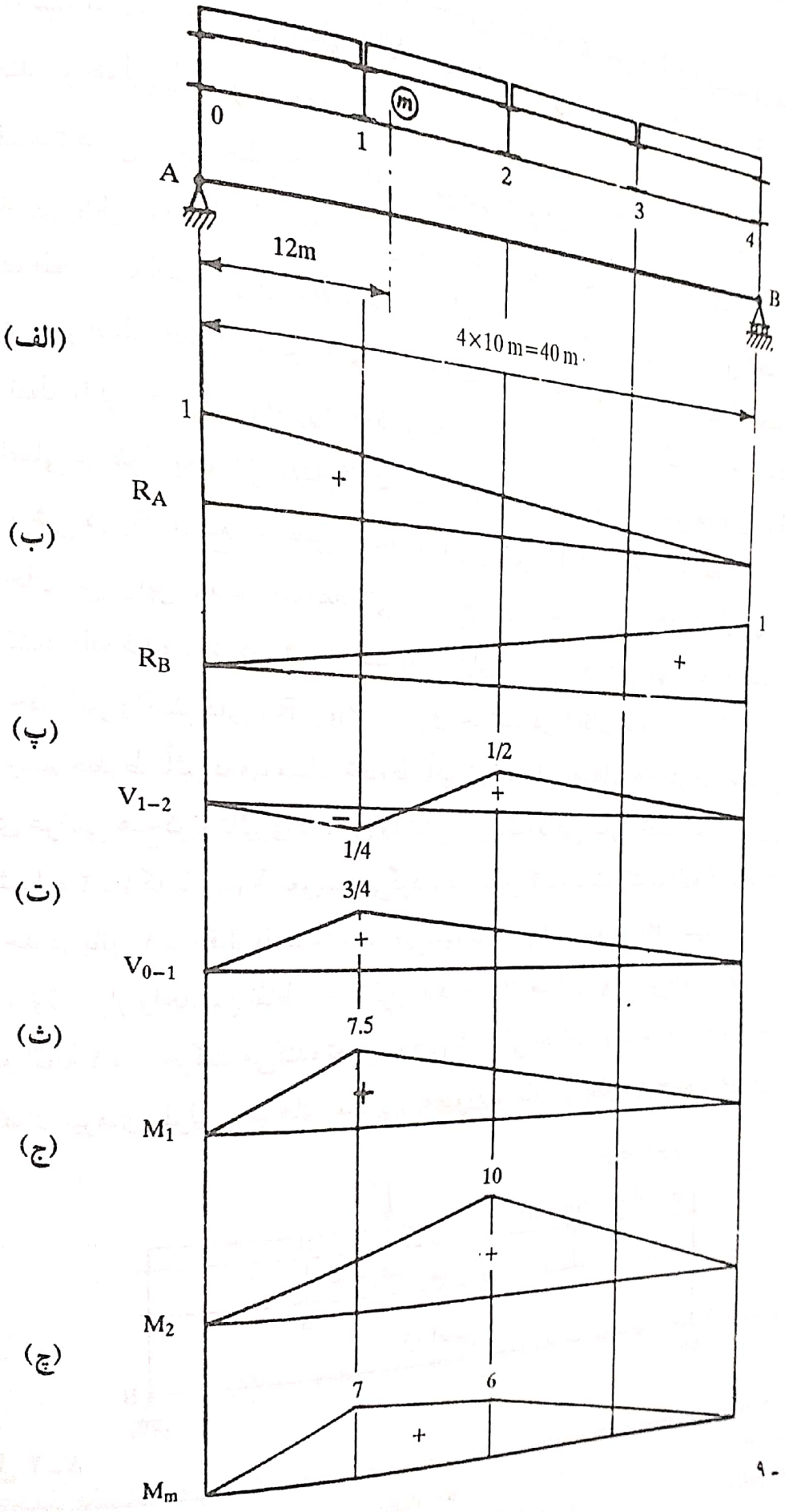

شکل ۴ ـ ۸

5–Main beam

6– Pannel

7– Pannel point

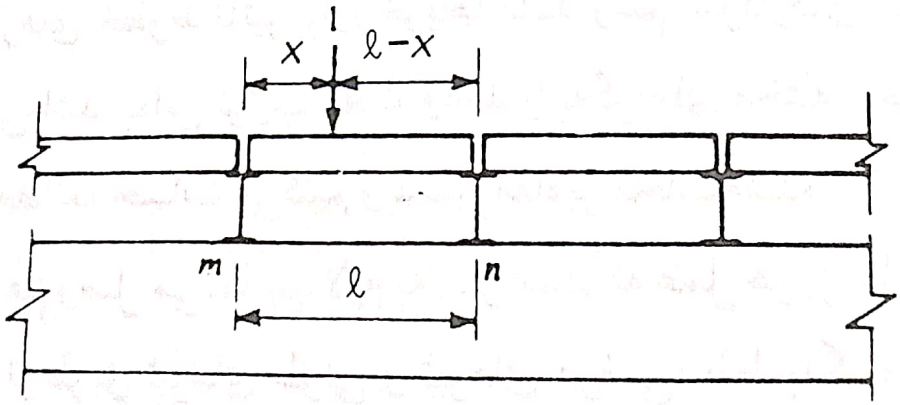
Scanned by CamScanner


(الف)
m
0
1
2
3
4
A
B
12m
4×10 m=40 m
(ب)
1
+
$R_A$
(پ)
1
$R_B$
+
(ت)
1/2
+
$V_{1-2}$
−
1/4
(ث)
3/4
+
$V_{0-1}$
(ج)
7.5
+
$M_1$
(چ)
10
+
$M_2$
(ح)
7
6
+
$M_m$

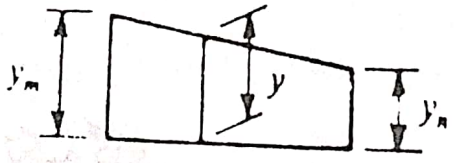
شکل ۴ ـ ۹

خط تأثیر نیروی برشی در پانل ۱ - ۰ نیز به‌طریق مشابه رسم می‌گردد.

برای رسم خط تأثیر لنگر خمشی برای نقطهٔ پانلی ۱ که آن را با $M_1$ نمایش می‌دهیم، باید توجه داشت که وقتی بار واحد در نقطهٔ ۰ اثر می‌کند، $M_1=0$ است. وقتی بار واحد بین نقاط پانلی ۱ تا ۴ قرار دارد، $M_1=10R_A$ می‌باشد که این معادله نشان‌دهندهٔ یک خط مستقیم با حداکثری




(الف)




(ب)

شکل ۴ - ۱۰

Scanned by CamScanner

مساوی ۷/۵ در نقطهٔ پانلی شماره ۱ و ۰ در نقطهٔ پانلی ۴ است. با اتصال عرض نقاط تأثیر در نقاط پانلی ۰ و ۱ با یک خط مستقیم، خط تأثیر $M_1$ را تکمیل می‌نماییم (شکل ۴ - ۹).

به‌طور مشابه، خط تأثیر لنگر نقطهٔ پانلی شماره ۲ نیز در شکل ۴ - ۹ - چ رسم می‌گردد.

لازم به‌تذکر است در این تیر اصلی، که طول تیرهای طولی آن مساوی طول کامل یک پانل می‌باشد، خط تأثیر لنگر در هر نقطهٔ پانلی، مشابه خط تأثیر لنگر نقطهٔ مشابه در یک تیر ساده است.

حال خط تأثیر لنگر خمشی را برای مقطع m که در بین نقاط پانلی ۱ و ۲ (در داخل پانل ۲ - ۱) قرار دارد، رسم می‌نماییم. وقتی که بار واحد در محدودهٔ پانل ۱ - ۰ قرار دارد، $M_m=28R_B$ می‌شود که این معادله نشان‌دهندهٔ یک خط مستقیم با عرض ۰ در نقطهٔ پانلی صفر و عرض حداکثری مساوی ۷ در نقطهٔ پانلی ۱ می‌باشد. وقتی که بار واحد در محدودهٔ نقاط پانلی ۲ تا ۴ قرار دارد. $M_m=12R_A$ می‌گردد که باز این معادله نشان‌دهندهٔ یک خط مستقیم با عرض ۰ در نقطهٔ پانلی شمارهٔ ۴ و عرض حداکثری مساوی ۶ در نقطهٔ پانلی شمارهٔ ۲ می‌باشد. با اتصال عرض خط تأثیر در نقاط پانلی شمارهٔ ۱ و ۲ به‌وسیلهٔ یک خط مستقیم، خط تأثیر $M_m$ کامل می‌شود (شکل ۴ - ۹).

Scanned by CamScanner

## روش عمومی رسم خط تأثیر

برای پیداکردن یک چنین منحنی تغییر شکل به‌صورت زیر عمل می‌نماییم:

۱ ـ مقاومت مربوط به‌تابعی راکه هدف رسم خط تأثیر آن است، حذف می‌کنیم.

۲ ـ یک بار واحد مجازی در امتداد و در محل آن تابع بر سازه وارد می‌آوریم.

۳ ـ مقادیر تغییر شکل سازه را در اثر بار واحد مجازی، در امتداد بار واحد متحرک محاسبه می‌نماییم.

۴ ـ تمام مقادیر تغییر شکل به‌دست آمده را بر مقدار تغییر شکل نقطه اثر تابع، در امتداد تابع، تقسیم می‌نماییم.

۵ ـ منحنی به‌دست آمده همان خط تأثیر مطلوب خواهد بود.

وقتی که از اصل مولر ـ برسلاو برای تعیین خط تأثیر سازه‌ای که بیش از یک درجه نامعینی دارد استفاده می‌کنیم، سازه‌ای که بعد از حذف مقاومت اضافی ایجاد می‌شود، خود هنوز یک سازهٔ نامعین قابل استفاده است. در حالتی که از اصل مولر ـ برسلاو برای تعیین خط تأثیر سازه‌های نامعین

Scanned by CamScanner

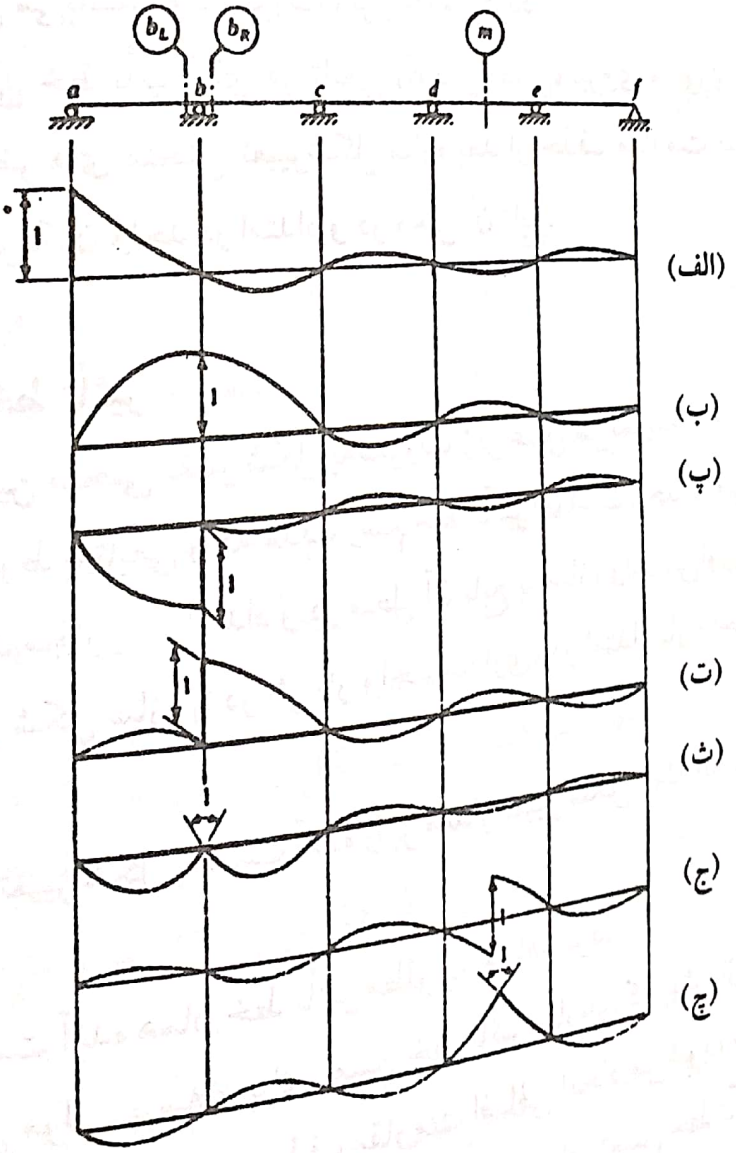
استفاده می‌کنیم، این اصل محدود به‌سازه‌هایی با مصالح خطی که از قانون هوک پیروی می‌کنند، می‌شود.

## طرح ظاهری خطوط تأثیر

طرح ظاهری خطوط تأثیر یک روش بسیار راحت و مطمئن برای رسم اصل مولر - برسلاو ما می‌گذارد. روش کار به‌قرار زیر است:

گام ۱. مقاومت مربوط به‌آن تابع را حذف کنید.
گام ۲. یک تغییرمکان واحد در امتداد و در محل تابع به‌سازه بدهید.
گام ۳. سازه تغییرشکل‌یافته خط تأثیر آن تابع خواهد بود.

شکل ۴ - ۱۵ نشان‌دهندهٔ خطوط تأثیر تیپ برای یک تیر یکسره پنج دهانه می‌باشد.




شکل ۴ - ۱۵

Scanned by CamScanner

## ۴-۱۱ کاربرد خط تأثیر

از خط تأثیر در دو مورد زیر استفاده می‌شود:

(۱) برای تعیین موقعیتی از بار زنده که با قرار گرفتن بار زنده در این موقعیت، تابعی که خط تأثیر آن رسم شده است، حداکثر گردد. به‌این موقعیت، موقعیت نامساعد بار برای آن تابع می‌گوییم.

(۲) تعیین مقدار تابع به‌ازای آن موقعیت بارگذاری.

Scanned by CamScanner

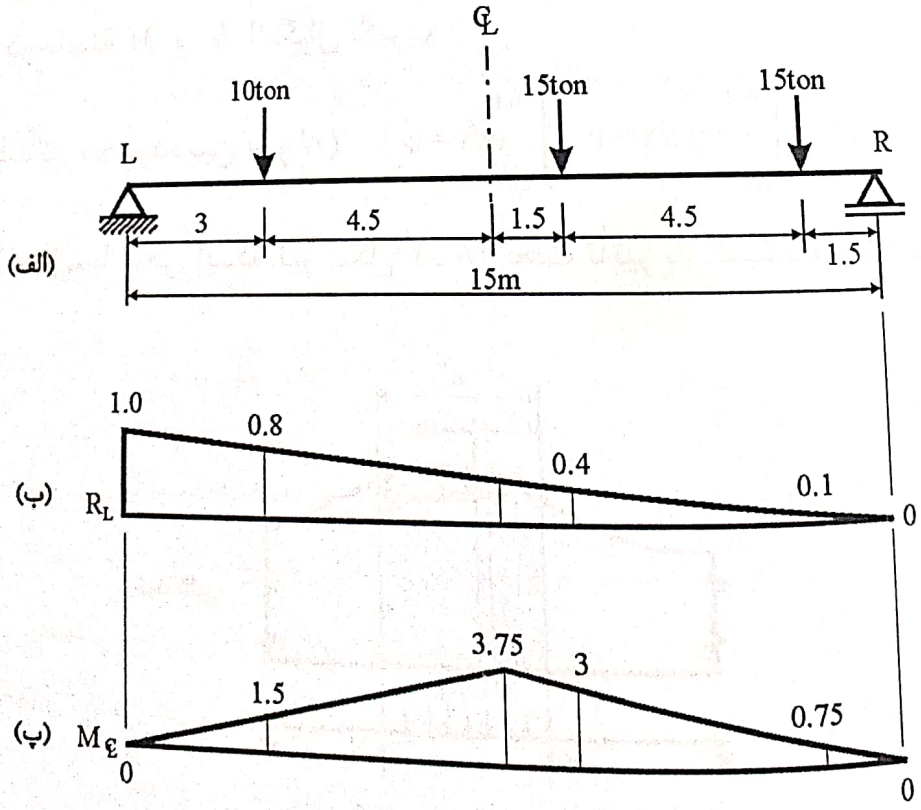
حداکثر یا حداقل (با در نظر گرفتن علامت) گردد. با معلوم شدن موقعیت، از روی قسمت اول می‌توان مقدار تابع را نیز محاسبه نمود. اینک به‌شرح موارد فوق می‌پردازیم:

## ۴ـ۹ کاربرد خط تأثیر برای نیروهایی که موقعیت آنها ثابت است

برای نشان دادن کاربرد خط تأثیر در این حالت، مثال تیر شکل ۴ ـ ۱۸ ـ الف را که خط تأثیر آن برای واکنش تکیه‌گاه سمت چپ (شکل ۴ ـ ۱۸ ـ ب) و لنگر خمشی در مقطع وسط (شکل ۴ ـ ۱۸ ـ پ) رسم گردیده است، در نظر می‌گیریم.

حال اگر یک بار واحد متمرکز در فاصلهٔ ۳ متری از تکیه گاه چپ، بر تیر تأثیر نماید، با توجه به‌تعریف خط تأثیر، واکنش تکیه گاه سمت چپ مساوی ۰/۸ واحد خواهد شد (شکل ۴ ـ ۱۸ ـ ب). هرگاه مقدار این نیروی واحد مساوی ۱۰ تن باشد (یعنی ۱۰ برابر نیروی واحد)، طبق اصل جمع آثار قوا، واکنش تکیه‌گاهی مساوی ۸=۰/۸×۱۰ تن خواهد شد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

مقدار تابع برای بارهای متمرکز از ضرب نیروهای متمرکز در مختصات مربوطه در خط تأثیر آن تابع به‌دست می‌آید.




شکل ۴ ـ ۱۸



Scanned by CamScanner

با توجه به‌قانون فوق، با معلوم بودن خط تأثیر واکنش تکیه‌گاه چپ و لنگر خمشی مقطع وسط تیر شکل ۴ ـ ۱۸، مقادیر آنها را برای بارگذاری نشان داده شده، محاسبه می‌نماییم:

$$R_L=(10)(0.8)+(15)(0.4)+(15)(0.1)=15.5\text{ton}$$

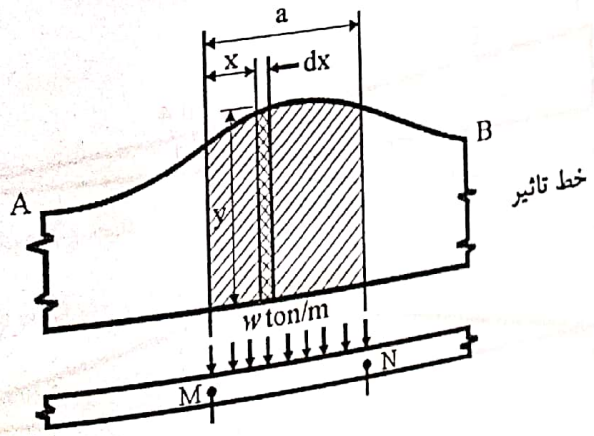
$$M_{\mathbb{C}}=(10)(1.5)+(15)(3)+(15)(0.75)=71.25\text{ton.m}$$ (وسط دهانه)

حال اگر به‌جای بار متمرکز، بار گستردهٔ یکنواخت داشته باشیم، برای تعیین مقدار تابع مورد نظر، باید شدت بار گستردهٔ یکنواخت را درسطح زیرخط تأثیر در ناحیه‌ای که بار گسترده مؤثر است، ضرب نماییم.

برای اثبات قضیهٔ فوق می‌توان چنین تحقیق نمود. فرض کنید که $AB$ خط تأثیر تابع مشخص $F$ از یک سازهٔ دلخواه باشد. قسمتی از این سازه، چنانچه در شکل ۴ ـ ۱۹ دیده می‌شود. تحت اثر بار گستردهٔ یکنواختی به‌شدت $w$ تن بر متر که در بین نقاط $M$ و $N$ اثر می‌کند، واقع شده باشد. قسمتی از بار گستردهٔ یکنواخت را که در فاصلهٔ $dx$ واقع است، می‌توان همانند بار متمرکزی با مقدار $wdx$ در نظر گرفت. در نتیجه مقدار تابع برای این بار متمرکز مساوی $dF=(wdx)y$ خواهد بود. در این رابطه $y$ عرض خط تأثیر در زیر بار متمرکز فرضی $wdx$ می‌باشد. اگر مقدار تابع را در اثر کل بار گستردهٔ یکنواخت بخواهیم، باید از مقدار به‌دست آمده در فاصلهٔ $M$ و $N$ انتگرال بگیریم.

$$F=\int dF=\int_{x_N}^{x_M} wydx=w\int_{x_N}^{x_M} ydx=w$$ (سطح زیر خط تأثیر محدوده بین $M$ و $N$)

به‌عنوان مثال، با فرض اینکه تیر شکل ۴ ـ ۱۸ تحت تأثیر بار گسترده به‌شدت 3 ton/m




شکل ۴ ـ ۱۹



Scanned by CamScanner

در کل طول تیر باشد، مقادیر $R_L$ و $M_{\text{℄}}$ برابر خواهد بود با:

$$R_L=(3)\left[\frac{1}{2}(1.0)(15.0)\right]=22.5 \text{ ton}$$

$$M_{\text{℄}}=(3)\left[\frac{1}{2}(3.75)(15.0)\right]=84.4 \text{ ton.m}$$

هرگاه نیروی گسترده فقط به‌نیمهٔ سمت چپ تیر مؤثر باشد، مقادیر $R_L$ و $M_{\text{℄}}$ برابر خواهند بود با:

$$R_L=(3)\left(\frac{1.0+0.5}{2}\,7.5\right)=16.9 \text{ ton}$$

$$M_{\text{℄}}=(3)\left[\frac{1}{2}(3.75)(7.5)\right]=42.2 \text{ ton.m}$$

هرگاه سازه‌ای تحت تأثیر نیروهای متمرکز و بار گستردهٔ یکنواخت باشد، مقدار تابع مورد مطالعه برابر خواهد بود با مجموع حاصل‌ضرب نیروهای متمرکز در مقادیر مربوطه در خط تأثیر به‌علاوهٔ حاصل‌ضرب شدت بار یکنواخت در مساحت قسمتی از خط تأثیر که نیروی یکنواخت مؤثر است.

## ۴ـ۱۰ کاربرد خط تأثیر برای نیروهایی که موقعیت آنها متغیر است

### الف) حداکثر و حداقل یک تابع

در حقیقت مورد استفادهٔ اصلی خط تأثیر، تعیین موقعیت بحرانی و یا نامساعد نیروها به‌منظور تعیین حداکثر یا حداقل یک تابع در یک مقطع مشخص (یا عضوی) از سازه می‌باشد. منظور از حداکثر یک تابع در واقع حداکثر مثبت و منظور از حداقل یک تابع، حداکثر منفی آن تابع می‌باشد. باید توجه داشت که در اثر حرکت بار در روی سازه، در یک مقطع مشخص، نه تنها مقدار تابع تغییر می‌نماید، بلکه علامت آن نیز ممکن است عوض شود. با توجه به‌بحث قبل، دو نتیجهٔ زیر حاصل می‌گردد:

۱ـ برای تعیین حداکثر یک تابع در اثر یک بار متمرکز زنده، بار باید در نقطه‌ای قرار گیرد که عرض خط تأثیر آن تابع حداکثر باشد.



Scanned by CamScanner

واحد به‌آن نقطه می‌باشد، چهار نتیجهٔ مهم زیر عاید می‌شود:

**نتیجهٔ ۱:**
برای تعیین حداکثر یک تابع در اثر یک بار متمرکز زنده، بار باید در نقطه‌ای قرار گیرد که عرض خط تأثیر آن تابع حداکثر باشد.

**نتیجهٔ ۲:**
مقدار تابع در اثر تأثیر یک بار متمرکز زنده مساوی است با حاصل‌ضرب مقدار بار در عرض خط تأثیر آن تابع، در نقطه‌ای که بار وارد می‌شود.

**نتیجهٔ ۳:**
برای تعیین حداکثر مقدار تابع در اثر یک بارگستردهٔ یکنواخت زنده، بار باید در تمام قسمت‌هایی از آن سازه قرار گیرد که علامت عرض‌های خط تأثیر آن تابع با علامتی که منظور محاسبهٔ حداکثر آن است، یکسان باشد. مثلاً اگر بخواهیم حداکثر لنگر خمشی منفی در یک مقطع از تیری را تعیین کنیم، بارگسترده باید در قسمت‌هایی از تیر قرار گیرد که خط تأثیر لنگر خمشی آن مقطع دارای علامت منفی باشد.

**نتیجهٔ ۴:**
مقدار یک تابع در اثر بارگستردهٔ یکنواخت زنده مساوی حاصل‌ضرب شدت بارگذاری در مساحت زیر خط تأثیر آن تابع در ناحیه‌ای که بارگستردهٔ یکنواخت قرار دارد، می‌باشد (البته با در نظر گرفتن علامت مساحت).

## حداکثر و حداقل یک تابع

در حقیقت مورد استفادهٔ اصلی خط تأثیر، تعیین موقعیت بحرانی و یا نامساعد نیروها به‌منظور تعیین حداکثر یا حداقل یک تابع در یک مقطع مشخص از تیر می‌باشد. منظور از حداکثر یک تابع در واقع حداکثر مثبت و منظور از حداقل یک تابع، حداکثر منفی آن تابع است. باید توجه داشت که در اثر حرکت بار در روی سازه، در یک مقطع مشخص، نه تنها مقدار تابع تغییر می‌نماید، بلکه علامت آن نیز ممکن است عوض شود. با توجه به‌بحث قبل، دو نتیجهٔ زیر را می‌توانیم بنویسیم:

Scanned by CamScanner

۱ ـ برای تعیین حداکثر یک تابع در اثر یک بار متمرکز زنده، بار باید در نقطه‌ای قرار گیرد که عرض خط تأثیر آن تابع حداکثر باشد.

۲ ـ برای تعیین حداکثر مقدار تابع در اثر یک بار گستردهٔ یکنواخت زنده، بار باید در تمام قسمت‌هایی از آن سازه قرار گیرد که علامت عرض‌های خط تأثیر آن تابع با علامتی که منظور محاسبهٔ حداکثر آن است، یکسان باشد. مثلاً اگر بخواهیم حداکثر لنگر خمشی منفی در یک مقطع از تیری را تعیین کنیم. بار گسترده باید در قسمت‌هایی از تیر قرار گیرد که خط تأثیر لنگر خمشی آن مقطع دارای علامت منفی باشد.

برای روشن شدن مطلب، از مثالی استفاده می‌نماییم:

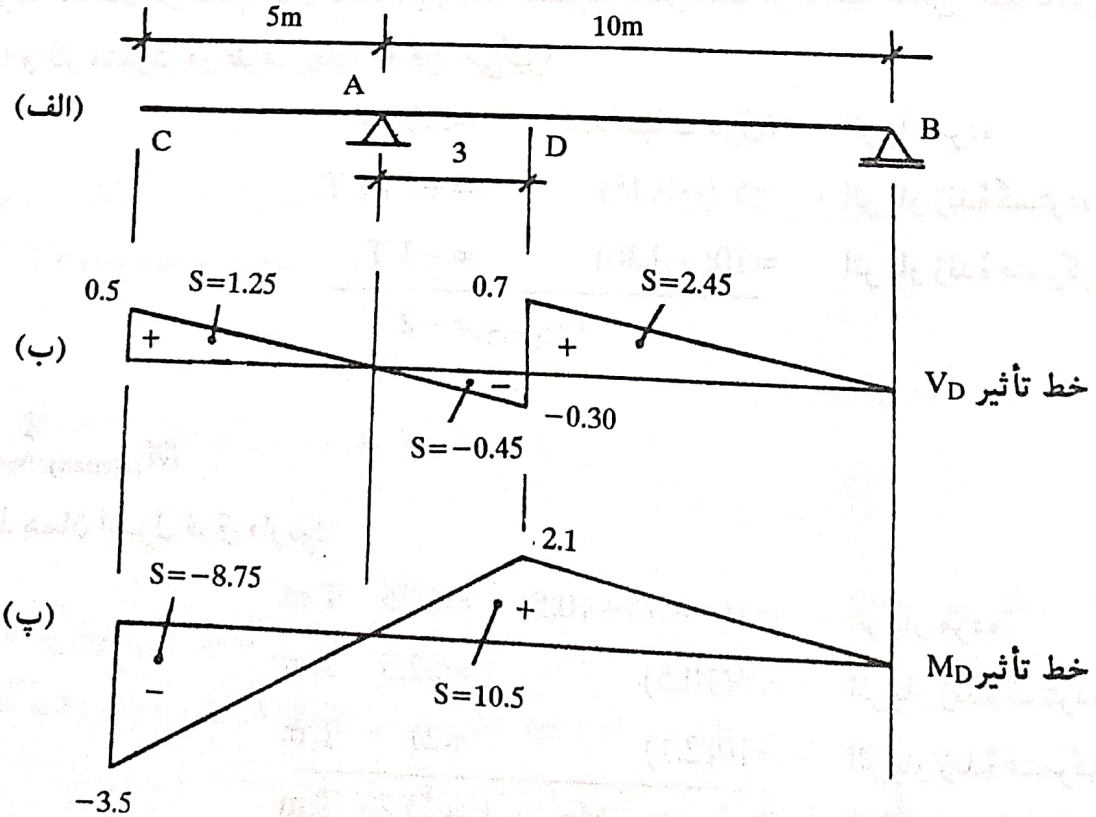
### مثال ۴ ـ ۱

برای تیر نشان داده شده در شکل: ابتدا خط تأثیر نیروی برشی و لنگر خمشی مقطع D را رسم نمایید و سپس با توجه به‌آنها، حداکثر و حداقل نیروی برشی و لنگر خمشی مقطع D را در اثر بارهای زیر تعیین کنید:

۱ ـ بار مردهٔ گستردهٔ یکنواخت به‌شدت ۱ تن بر متر

۲ ـ بار زندهٔ متمرکز به‌مقدار ۱۰ تن

۳ ـ بار زندهٔ گستردهٔ یکنواخت به‌شدت ۵ تن بر متر.




شکل ۴ ـ ۱۷ مثال ۴ ـ ۱.

Scanned by CamScanner

حل:
ابتدا خط تأثیر $V_D$ و $M_D$ را به‌ترتیب در اشکال (ب و پ) رسم می‌نماییم. با توجه به‌اینکه در مسئله بار گستردهٔ یکنواخت وجود دارد، مساحت هر قسمت را محاسبه کرده و در روی شکل می‌نویسیم.

محاسبهٔ $V_{D(max)}$
برای تعیین حداکثر نیروی برشی، بار مردهٔ گستردهٔ یکنواخت (که مثلاً می‌تواند وزن تیر باشد) در تمام طول دهانه (از C تا B) باید قرار گیرد. اما بار زندهٔ گستردهٔ یکنواخت، باید در نواحی نیروی برشی مثبت قرار گیرد (ناحیهٔ CA و DB). بار زندهٔ متمرکز نیز باید در محلی قرار گیرد که حداکثر نیروی برشی مثبت تولید شود (طرف راست نقطهٔ D).

اثر بار مرده $=1(1.25-0.45+2.45)=3.25$ T
اثر بار زندهٔ گسترده $=5(1.25+2.45)=18.5$ T
اثر بار زندهٔ متمرکز $=7$ T
$V_{D(max)}=28.75$ T

محاسبهٔ $V_{D(min)}$
بار مرده کماکان در تمام طول دهانه، بار زندهٔ گستردهٔ یکنواخت در ناحیه منفی خط تأثیر (ناحیهٔ AD) و بار متمرکز در طرف چپ D قرار می‌گیرد.

اثر بار مرده (محاسبات فوق) $=3.25$ T
اثر بار زندهٔ گسترده $=5(-0.45)=-2.25$ T
اثر بار زندهٔ متمرکز $=10(-0.30)=-3$ T
$V_{D(min)}=-2$ T

محاسبهٔ $M_{D(max)}$
با حفظ همان اصول فوق داریم:

اثر بار مرده $=1(-8.75+10.5)=1.75$ T.m
اثر بار زندهٔ گسترده $=5(10.5)=52.5$ T.m
اثر بار زندهٔ متمرکز $=10(2.1)=21$ T.m
$M_{D(max)}=75.25$ T.m

Scanned by CamScanner

محاسبهٔ $M_{D(min)}$

| | | |
|---|---|---|
| اثر بار مرده | | $=1.75$ T.m |
| اثر بار زندهٔ گسترده | $=5(-8.75)$ | $=-43.75$ T.m |
| اثر بار زندهٔ متمرکز | $=10(-3.5)$ | $=-35$ T.m |
| | $M_{D(min)}$ | $=-77$ T.m |

## ۴ـ۱۲ خطوط تأثیر آماده

در اشکال ۴ـ۱۸ الی ۴ـ۲۸ منحنی‌های تأثیر نیروی برشی و لنگر خمشی تیرهای یکسرهٔ دو دهانه با دهانه‌های مساوی، سه دهانه با دهانه‌های مساوی و چهار دهانه با دهانه‌های مساوی نشان داده شده است. مقادیر توابع برای مقاطع مختلف به‌فواصل 0.1 L داده شده است.

اعداد نوشته شده در روی منحنی‌های تأثیر، نیروی برشی و لنگر خمشی بدون بعد هستند. بنابراین هنگام استفاده از منحنی باید نکات زیر را رعایت بکنیم:

۱ـ اگر بخواهیم لنگر خمشی ناشی از بارگستردهٔ یکنواخت به‌شدت q را حساب نماییم:

$M=q\times$ (سطح زیر منحنی واقع در محدودهٔ بار) $\times L^2$

۲ـ اگر بخواهیم لنگر خمشی ناشی از بار متمرکز p را حساب کنیم:

$M=p\times$ (عرض منحنی در زیر بار) $\times L$

۳ـ اگر بخواهیم نیروی برشی ناشی از بارگستردهٔ یکنواخت به‌شدت q را حساب نماییم:

$V=q\times$ (سطح زیر منحنی واقع در محدودهٔ بار) $\times L$

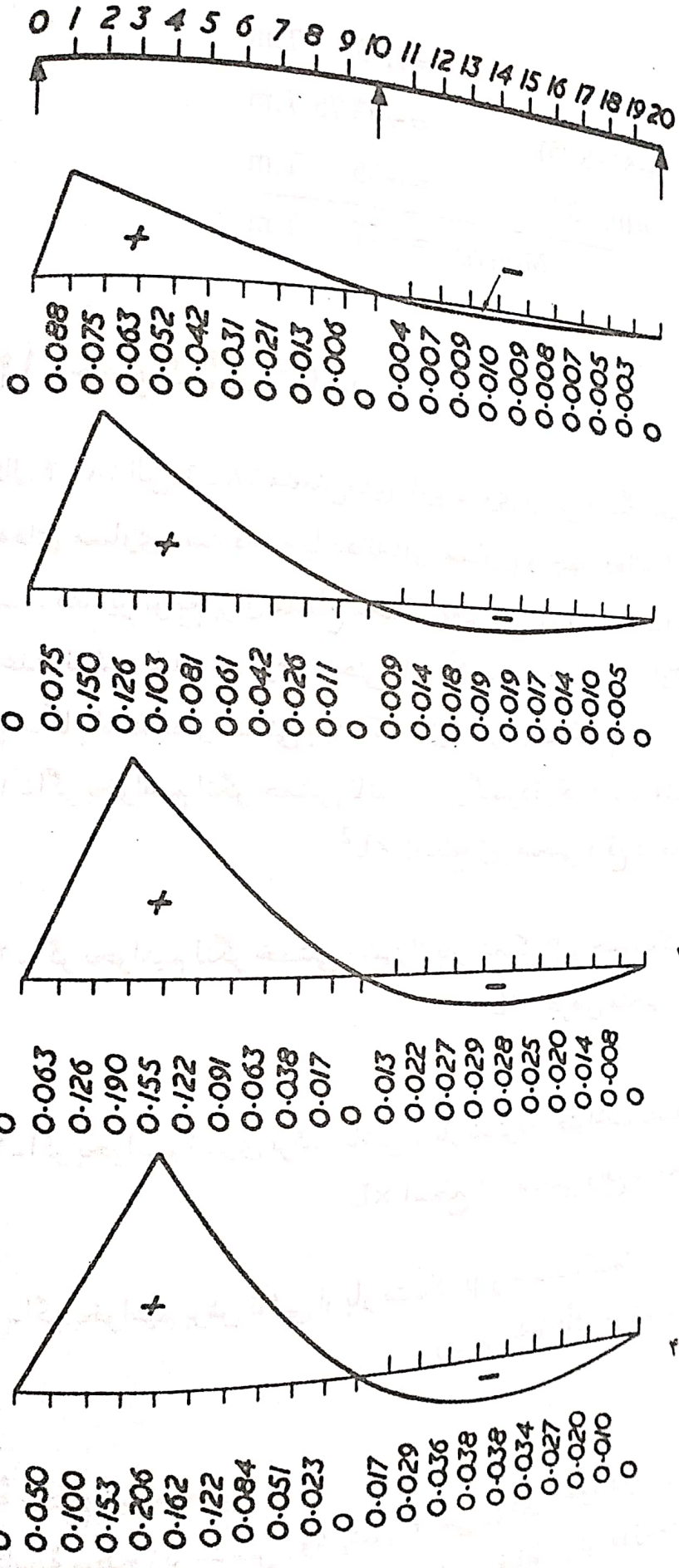
۴ـ اگر بخواهیم برش ناشی از بار متمرکز p را حساب کنیم:

$V=p\times$ (عرض خط تأثیر در زیر بار متمرکز)

### محاسبهٔ سطح زیر منحنی

برای محاسبهٔ سطح زیر منحنی روش‌های تقریبی زیادی وجود دارد. از جملهٔ این روش‌ها می‌توان روش ذوزنقه و روش سیمسون را نام برد. در اینجا فقط روش ذوزنقه را که دارای دقت کافی و سهولت زیاد برای مسئله مورد نظر ما می‌باشد، بیان می‌کنیم.

Scanned by CamScanner




شکل ۴ - ۱۸ خطوط تأثیر برای لنگرهای خمشی - تیر یکسره دو دهانه.

Scanned by CamScanner

### روش ذوزنقه

سطح زیر منحنی از رابطهٔ ذوزنقه ( n چه زوج و چه فرد) به‌دست می‌آید:

$$\text{رابطهٔ ذوزنقه} = \int_a^b ydx = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

در هنگام استفاده از رابطهٔ فوق، طول قطعه باید به‌فواصل مساوی h تقسیم گردد (برای منحنی‌های مورد نظر، $h=0.1$ می‌باشد). $y_0$ و $y_n$ نیز به‌ترتیب عرض‌های مربوط به‌اولین و آخرین نقطه و $y_1$ الی $y_{n-1}$ نیز عرض‌های نقاط میانی می‌باشد.

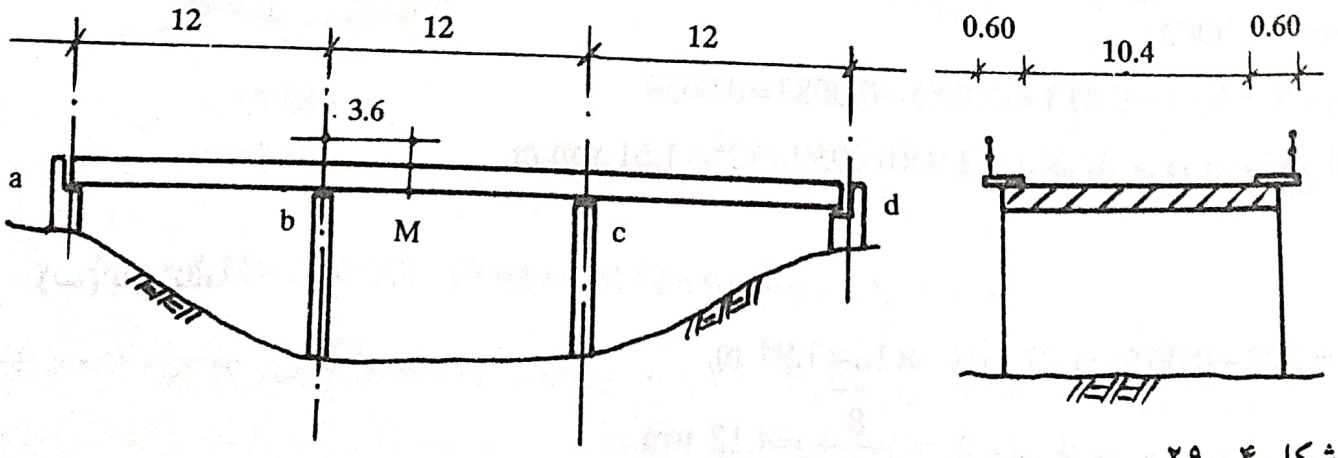
### مثال ۴ ـ ۲

مطلوب است تعیین لنگر بار مرده و لنگر حداکثر مثبت و لنگر حداکثر منفی بار زنده در نقطهٔ M به‌فاصله ۳/۶ متر از تکیه‌گاه b در دهانه bc پل سه دهانه یکسره شکل ۴ ـ ۲۹.

### معلومات طرح:

| | | |
|---|---|---|
| متر | ۱۲ | = طول دهانه |
| متر | ۰/۷ | = قطر سقف |
| تن بر متر مکعب | ۲/۵ | = وزن مخصوص بتن |
| متر | ۰/۰۷ | = ضخامت آسفالت |
| تن بر متر مکعب | ۲/۱ | = وزن مخصوص آسفالت |

بار زنده: کامیون ۴۰ تن ایران به‌همراه بار خطی آن



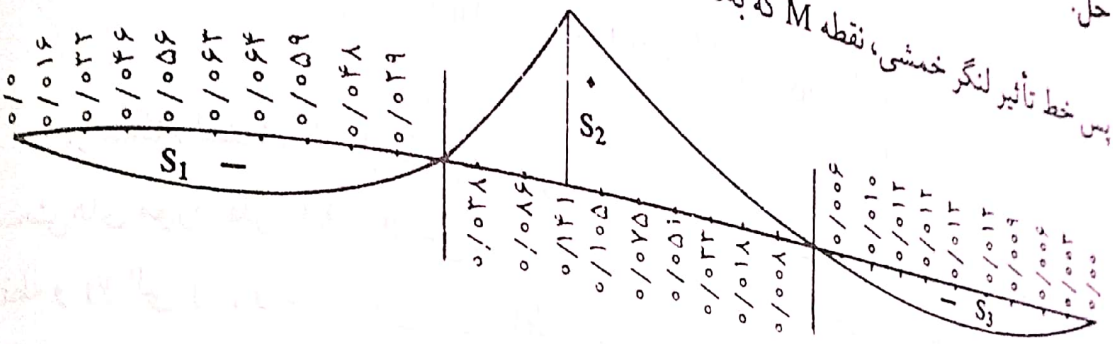

شکل ۴ ـ ۲۹

Scanned by CamScanner

$3.6/12=0.3$

پس خط تأثیر لنگر خمشی، نقطه M که به‌فاصله L ۰/۳ از b قرار دارد از شکل ۴ - ۲۳ به‌دست می‌آید:

حل:

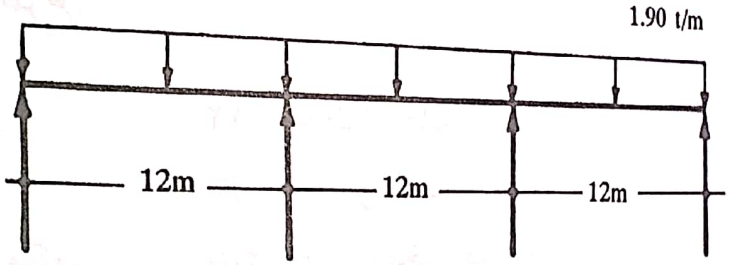



شکل ۴ - ۳۰

مقادیر لنگر بار مرده و زنده را برای پهنای ۱ متر به‌دست می‌آوریم:

(الف) بار مرده

بار مرده وارد بر یک متر عرض $=1\times1\times0.7\times2.5+1\times1\times0.07\times2.1=1.90$ ton/m




شکل ۴ - ۳۱

$S_1=-0.1(0+0.016+0.032+0.046+0.056+0.063+0.064+0.059+0.048+0.029+0)$

$S_1=-0.0413$

$S_2=0.1(0+0.038+0.086+0.141+0.105+0.075+0.051+0.033+0.018+0.008+0)$

$S_2=0.0555$

$S_3=-0.1(0.0+0.006+0.010+0.012+0.012+0.013+0.012+0.009+0.006+0.003+0.00)$

$S_3=-0.0083$

$S_1+S_2+S_3=-0.413+0.0555-0.0083=0.0059$

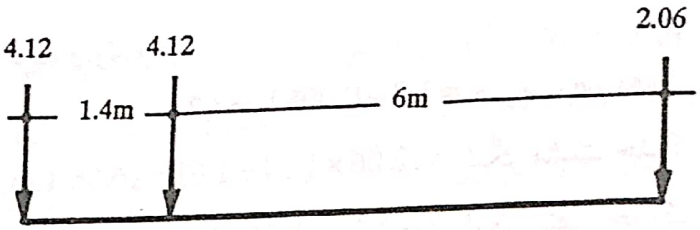
لنگر بار مرده در مقطع M $=1.9\times0.0059\times12^2=1.61$ ton.m

(ب) بار زنده

$E=1.22+0.06\,S=1.22+0.06\times12=1.94$ m

بار وارد از چرخ بر پهنای ۱ متر $=\frac{8}{1.94}=4.12$ ton

Scanned by CamScanner




شکل ۴ ـ ۳۲

## لنگر مثبت حداکثر بار زنده

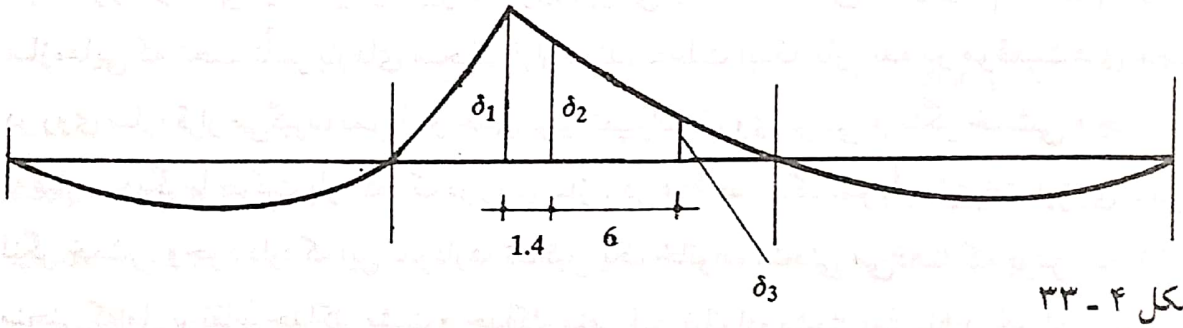
این لنگر وقتی رخ می‌دهد که کامیون به‌صورت زیر در روی دهانه وسط قرار گرفته باشد:

$\delta_1=0.141$

$\delta_2=0.10$

$\delta_3=0.006$

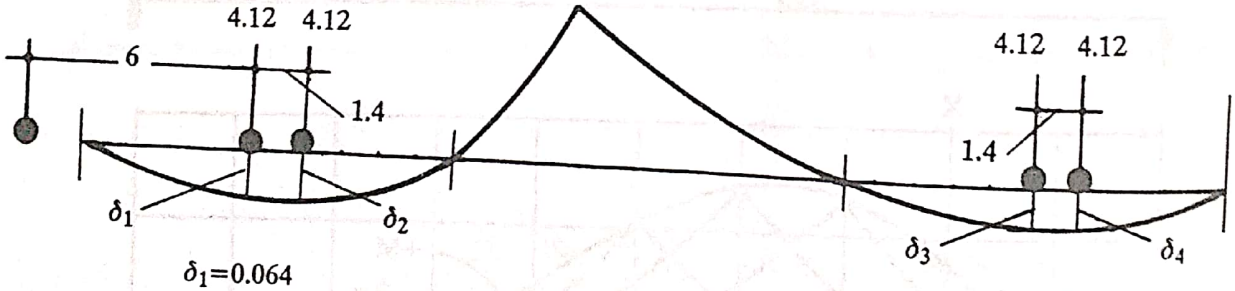
$M=4.12\times12(0.141+0.1)+2.06\times12\times0.006=12.06$ ton.m




شکل ۴ ـ ۳۳

## لنگر منفی حداکثر بار زنده

این لنگر وقتی رخ می‌دهد که کامیون به‌صورت زیر در روی دو دهانه کناری قرار گرفته باشد.




شکل ۴ ـ ۳۴

$M=-4.12\times12(0.064+0.062+0.013+0.011)=-7.42$ ton.m

**تذکر:** آرایش کامیون‌ها مطابق شکل ۴ ـ ۳۴ با دستورالعمل آیین‌نامه بارگذاری مغایرت دارد و بهتر است در یکی از دهانه‌ها بار گسترده قرار گیرد.

Scanned by CamScanner

مجموع لنگرهای بار مرده و زنده

ضریب ضربه $= 1.3 - 0.005\,L = 1.24$

لنگر مثبت حداکثر در مقطع M $= 12.06 \times 1.24 + 1.61 = 16.56$ ton.m

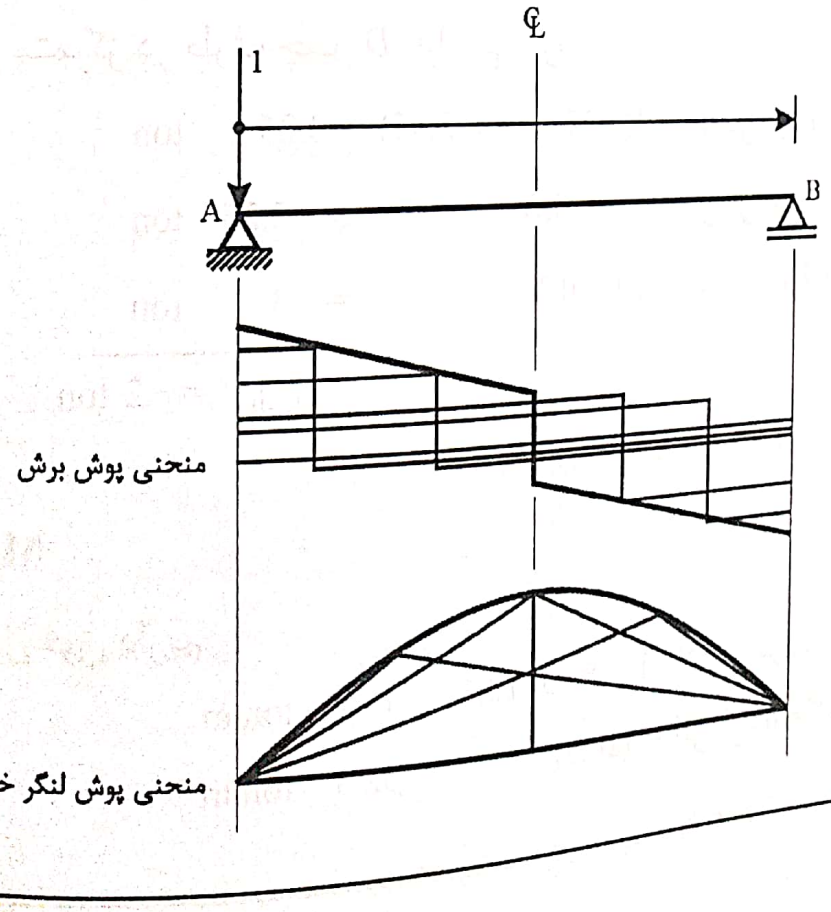
لنگر منفی حداکثر در مقطع M $= -7.42 \times 1.24 + 1.61 = -7.59$ ton.m

ملاحظه می‌شود که در مقطع M هم لنگر مثبت و هم لنگر منفی وجود دارد. اگر این کار را برای تمام نقاط (به‌فاصلهٔ 0.1L) سه دهانه انجام دهیم می‌توانیم پوش لنگر مثبت حداکثر و پوش لنگر منفی حداکثر را برای تمام تیر یکسره رسم کنیم و از روی آن به‌طراحی میلگرد بپردازیم.

Scanned by CamScanner

## ب) منحنی پوش نیروی برشی و لنگر خمشی

معیار طراحی برای تیری تحت بار با موقعیت ثابت، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی آن است. حال این سؤال پیش می‌آید که معیار طراحی برای تیر تحت نیروی متحرک چیست. مطابق شکل زیر اگر تیر ساده‌ای تحت بار متمرکز متحرکی قرار گیرد، برای هر موقعیت بار می‌توان یک نمودار نیروی برشی و یک نمودار لنگر خمشی رسم نمود. این نمودارها تشکیل یک خانواده منحنی می‌دهند که منحنی مار بر نقاط حداکثر آنها، نمودار پوش نیروی برشی و لنگر خمشی خواهد بود که معیار طراحی مطمئنی برای تیر تحت تأثیر نیروهای متحرک است.






Scanned by CamScanner

برای رسم منحنی پوش نیازی به‌رسم نمودارهای متعدد نیست و می‌توان با تعیین مقادیر حداکثر و حداقل تابع در نقاط محدودی از داخل دهانه و عبور یک منحنی هموار از آنها، منحنی پوش را به‌دست آورد. برای نشان دادن روش کار از یک مثال استفاده می‌شود.

تیر شکل ۴ ـ ۲۰ ـ الف مفروض است. بار مردهٔ این تیر شامل بار گستردهٔ یکنواختی به‌شدت ۱ تن بر متر و بار زندهٔ آن شامل بار گستردهٔ یکنواختی به‌شدت ۲ تن بر متر و بار متمرکزی به‌مقدار ۱۰ تن می‌باشد. با توجه به‌اینکه بار زنده می‌تواند در هر نقطهٔ تیر قرار گیرد، مطلوب است تعیین نیروهای داخلی طراحی تیر.

**حل:**

همان‌طور که می‌دانیم برای طرح یک تیر باید واکنش‌های تکیه‌گاهی، نمودار تغییرات نیروی برشی و نمودار تغییرات لنگر خمشی معلوم باشد. اما از آنجایی که در این مثال، بار زنده موقعیت مشخصی ندارد و در هر نقطه از تیر می‌تواند اثر داشته باشد، نمودار تغییرات واحدی برای این تیر وجود ندارد و برای هر حالت بارگذاری، یک نمودار تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی می‌توان رسم نمود. این نمودارهای تغییرات، تشکیل یک دسته منحنی می‌دهند که پوش این دسته منحنی، یک معیار منطقی برای طراحی تیر می‌باشد. یکی از اصولی‌ترین روش‌ها برای رسم منحنی پوش نیروی برشی و لنگر خمشی استفاده از خط تأثیر می‌باشد که در طی این مثال به‌شرح آن می‌پردازیم.

برای تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی حداکثر و حداقل* و رسم منحنی پوش نیروی برشی و لنگر خمشی، خط تأثیر واکنش‌های تکیه گاهی و خط تأثیر نیروی برشی و لنگر خمشی را برای نقاط تکیه‌گاهی، وسط و یک‌چهارم دهانهٔ تیر رسم می‌نماییم (شکل‌های ۴ ـ ۲۰ ـ ب الی آخر).

## واکنش تکیه‌گاهی $R_A$ (شکل ۴ ـ ۲۰ ـ ب)

بار مرده همواره بر تمام طول تیر اثر می‌کند، اما بار زنده می‌تواند در قسمت‌هایی اثر داشته و در قسمت‌هایی اثر نداشته باشد. اگر منظور محاسبهٔ $R_{A(\max)}$ باشد، بار زندهٔ گسترده باید در ناحیهٔ $CB$ و بار زندهٔ متمرکز در نقطهٔ $C$ اثر داشته باشد. داریم:

* منظور از لفظ حداکثر، یعنی حداکثر مثبت و منظور از لفظ حداقل، یعنی حداکثر منفی آن تابع.



Scanned by CamScanner

$R_{A(max)}$ = اثر بار متمرکز + اثر بار زندهٔ یکنواخت + اثر بار مرده

$R_{A(max)} = (9-0.56)1+9 \times 2+10 \times 1.5=41.44$ ton

برای تعیین $R_{A(min)}$، بار زندهٔ گسترده باید در ناحیهٔ $BD$ و بار زندهٔ متمرکز در نقطهٔ $D$ اثر داشته باشد. بار مرده کماکان در تمام طول تیر اثر دارد.

$R_{A(min)} = (9-0.56)1-0.56 \times 2-10 \times 0.375=3.57$ ton

ملاحظه می‌شود که $R_A$ همواره مثبت است. این موضوع به‌خاطر اثر بار مرده می‌باشد.

## واکنش تکیه‌گاهی $R_B$

برای تعیین $R_{B(max)}$ بار زندهٔ گسترده را در ناحیهٔ $AD$ و بار متمرکز را در نقطهٔ $D$ اثر می‌دهیم.

$R_{B(max)} = (7.56-1)1+7.56 \times 2+10 \times 1.375=35.43$ ton

برای تعیین $R_{B(min)}$ بار زندهٔ گسترده را در ناحیهٔ $CA$ و بار متمرکز را در نقطهٔ $C$ اثر می‌دهیم.

$R_{B(min)} = (7.56-1)1-1 \times 2-10 \times 0.5=-0.44$ ton

نیروی برشی در سمت چپ $A$

$V_{AL(min)} = (-4)1+(-4)2+(-1)(10)=-22$ton

نیروی برشی در سمت راست $A$

برای تعیین $V_{A(max)}$، بار زندهٔ گسترده را در ناحیهٔ $CB$ و بار متمرکز را در نقطهٔ $A$ اثر می‌دهیم.

$V_{AR(max)} = (1+4-0.56)1+(1+4)2+1 \times 10=24.44$ton

برای تعیین $V_{A(min)}$ بار زندهٔ گسترده را در ناحیهٔ $BD$ و بار متمرکز را در نقطهٔ $D$ اثر می‌دهیم.

$V_{AR(min)} = (1+4-0.56)1-0.56 \times 2-0.375 \times 10=-0.43$ton

نیروی برشی در نقطهٔ $b$

برای تعیین $V_{b(max)}$ بار زندهٔ گسترده را در ناحیهٔ $CA$ و $bB$ و بار متمرکز را در سمت راست $b$ قرار می‌دهیم:

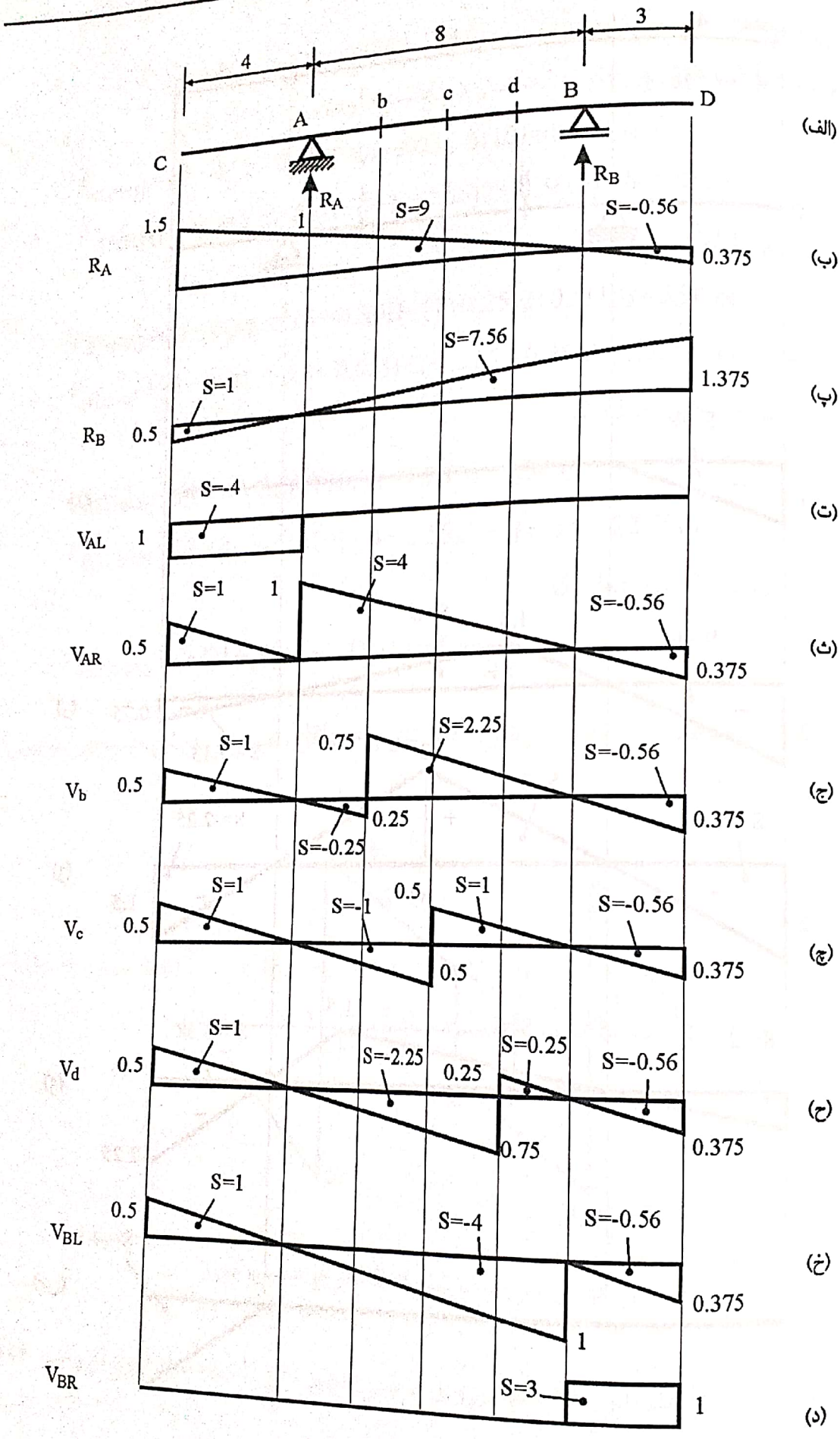
$V_{b(max)} = (1-0.25+2.25-0.56)1+(1+2.25)2+0.75(10)=16.44$ton

برای تعیین $V_{b(min)}$ بار زندهٔ گسترده را در ناحیهٔ $Ab$ و $BD$ و بار متمرکز را در نقطهٔ $D$ قرار می‌دهیم.

$V_{b(min)} = (1-0.25+2.25-0.56)1+(-0.25-0.56)2-0.375(10)=-2.93$ton



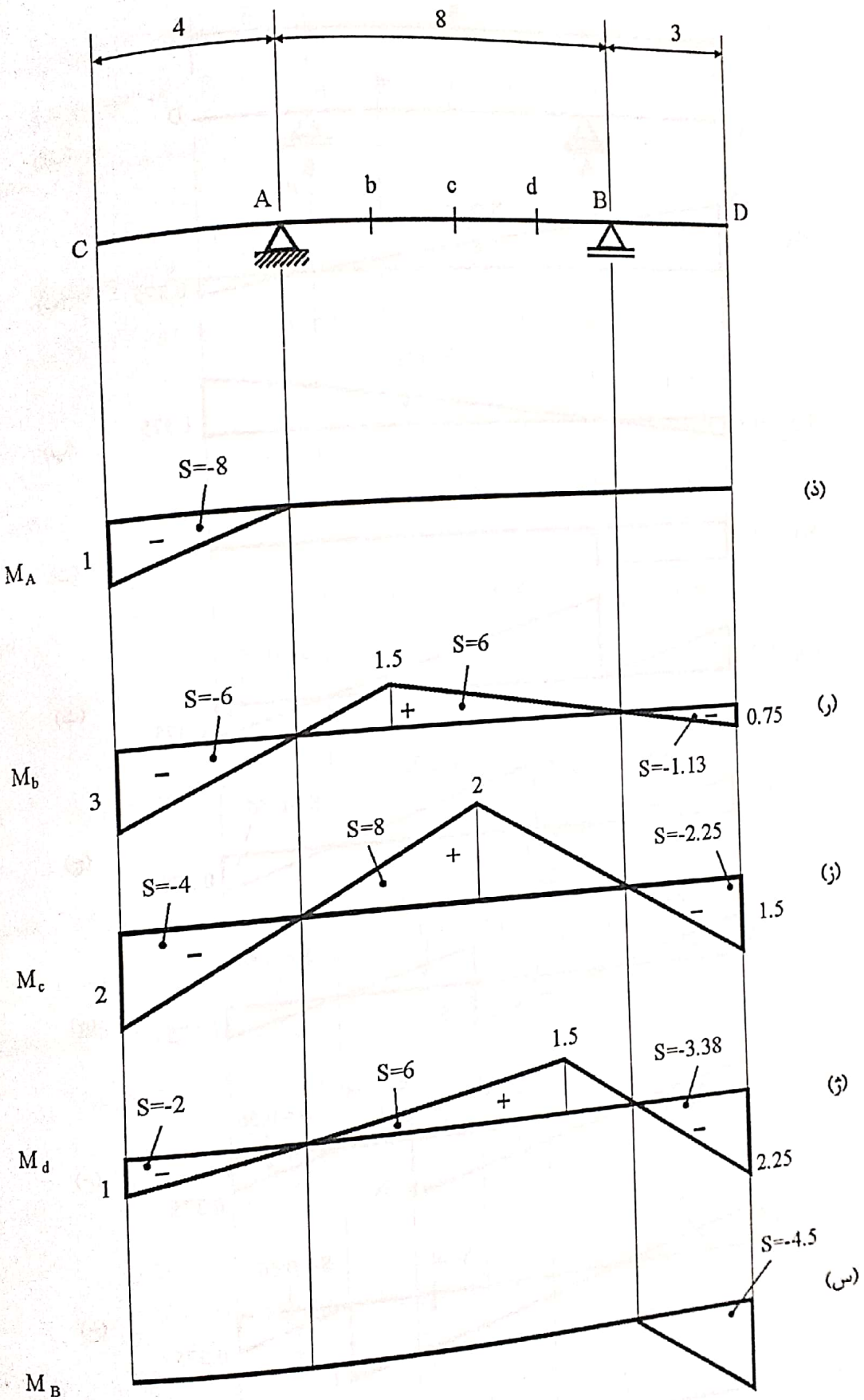
Scanned by CamScanner




شکل ۴ ـ ۲۰ خطوط تأثیر توابع مختلف.



Scanned by CamScanner




شکل ۴ـ۲۰ خطوط تأثیر توابع مختلف. (ادامه)



Scanned by CamScanner

نیروی برشی در نقطهٔ $c$

با توجه به‌مطالب فوق و رعایت اختصار در گفتار داریم:

$$V_{c(\max)}=(1-1+1-0.56)1+(1+1)2+0.5(10)=9.44\text{ton}$$

$$V_{c(\min)}=(1-1+1-0.56)1+(-1-0.56)2-0.5(10)=-7.68\text{ton}$$

نیروی برشی در نقطهٔ $d$

$$V_{d(\max)}=(1-2.25+0.25-0.56)1+(1+0.25)2+0.5(10)=5.94\text{ton}$$

$$V_{d(\min)}=(1-2.25+0.25-0.56)1+(-2.25-0.56)2-0.75(10)=-14.68\text{ton}$$

نیروی برشی در سمت چپ نقطهٔ $B$

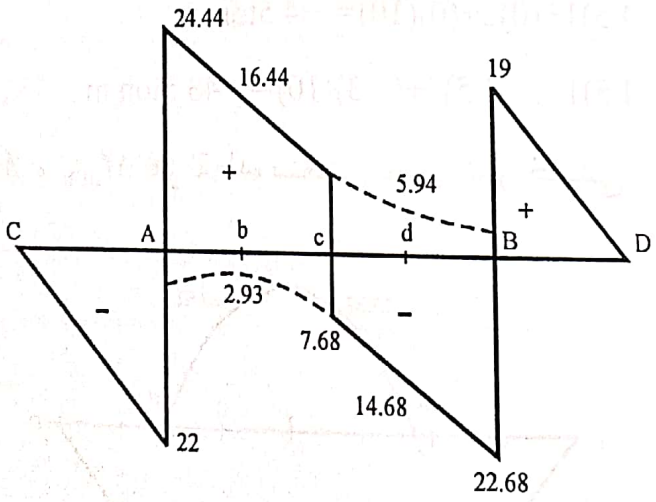
$$V_{BL(\max)}=(1-4-0.56)1+(1)2+0.5(10)=3.34\text{ton}$$

$$V_{BL(\min)}=(1-4-0.56)1+(-4-0.56)2-1(10)=-22.68\text{ton}$$

نیروی برشی در سمت راست نقطهٔ $B$

$$V_{BR(\max)}=(+3)1+(+3)2+(+1)(10)=19\text{ton}$$

حال با توجه به‌مقادیر نیروهای برشی حداکثر و حداقل، منحنی پوش نیروی برشی را رسم می‌کنیم.




**منحنی پوش نیروی برشی (مقادیر برحسب تن)**

توجه نمایید که در طراحی علامت نیروی برشی مهم نمی‌باشد، بنابراین از رسم خطوط خط‌چین صرف‌نظر می‌نماییم.



Scanned by CamScanner

اکنون با توجه به‌اصول ذکرشده، مقادیر $M_{max}$ و $M_{min}$ را در نقاط مختلف محاسبه می‌نماییم:

نقطهٔ $A$

$$M_{A(max)}=(-8)1+(0)2+(0)(10)=-8ton.m$$
$$M_{A(min)}=(-8)1+(-8)2+(-4)(10)=-64ton.m$$

نقطهٔ $b$

$$M_{b(max)}=(-6+6-1.13)1+(6)2+(1.5)(10)=25.87ton.m$$
$$M_{b(min)}=(-6+6-1.13)1+(-6-1.13)2+(-3)(10)=-45.4ton.m$$

نقطهٔ $c$

$$M_{c(max)}=(-4+8-2.25)1+(8)2+(2)(10)=37.75ton.m$$
$$M_{c(min)}=(-4+8-2.25)1+(-4-2.25)2+(-2)(10)=-30.75ton.m$$

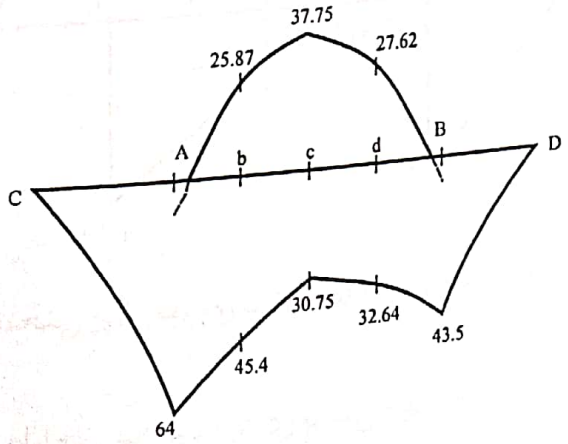
نقطهٔ $d$

$$M_{d(max)}=(-2+6-3.38)1+(6)2+(1.5)(10)=27.62ton.m$$
$$M_{d(min)}=(-2+6-3.38)1+(-2-3.38)2+(-2.25)(10)=-32.64ton.m$$

نقطهٔ $B$

$$M_{B(max)}=(-4.5)1+(0)2+(0)(10)=-4.5ton.m$$
$$M_{B(min)}=(-4.5)1+(-4.5)2+(-3)(10)=-43.5ton.m$$

با توجه به‌مقادیر $M_{max}$ و $M_{min}$ هر نقطه، منحنی پوش لنگر خمشی را رسم می‌نماییم.




منحنی پوش لنگر خمشی (مقادیر برحسب تن متر)



Scanned by CamScanner

## ۴ـ۱۱ سری بارهای متمرکز

همان‌طور که در قبل متذکر گردید، در هنگام طراحی قسمت خاصی از یک سازه، لازم است که بار زنده را در وضعیتی قرار دهیم که حداکثر تنش ناشی از بار زنده در قسمت مزبور ایجاد گردد. وقتی که بار زنده فقط یک بار متمرکز و یا بار گسترده باشد، موقعیت بحرانی بار را با یک نگاه به‌خط تأثیر می‌توان به‌دست آورد. اما وقتی که بار زنده از چند بار متمرکز به‌فاصلهٔ معینی از یکدیگر قرار دارند، تشکیل شده باشد، به‌سادگی نمی‌توان موقعیت بحرانی بار زنده را به‌دست آورد. روش کلی در برخورد با چنین مسائلی استفاده از روش آزمون و خطا می‌باشد. بدین‌ترتیب که سری بار متمرکز در چندین وضعیت در روی تیر قرار می‌گیرد. در هر وضعیت به‌کمک خط تأثیر مقدار تابع تعیین می‌گردد. با مقایسهٔ مقادیر، موقعیت بحرانی و مقدار حداکثر قابل حصول است.



Scanned by CamScanner

## ۴ـ۱۲ لنگر خمشی حداکثر مطلق در تیر ساده

در این قسمت بدون توجه به‌مفهوم خط تأثیر، با استفاده از روش‌های تحلیلی، لنگر خمشی حداکثر مطلق در یک تیر ساده در اثر سری بارهای متمرکز را به‌دست می‌آوریم.

در این مورد بدیهی است که نمودار لنگر همواره شامل خطوط مستقیم می‌باشد که در نقاط تأثیر نیروهای متمرکز متقاطع می‌باشند. لذا نتیجه می‌شود که لنگر حداکثر در نقطهٔ اثر یکی از نیروهای متمرکز ایجاد می‌شود، در اینجا بایستی به‌دو سؤال پاسخ دهیم:

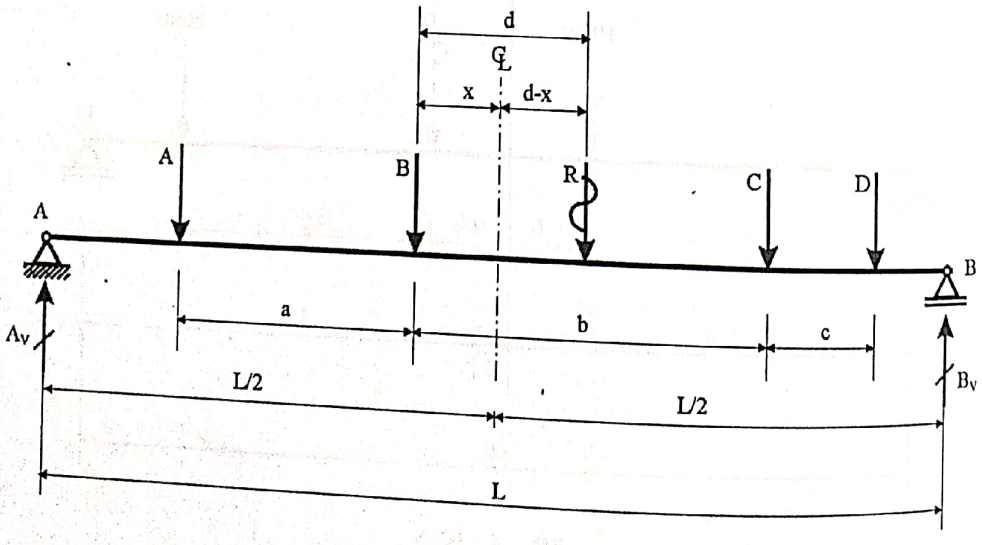
۱ـ در نقطهٔ اثر کدام نیرو حداکثر لنگر زنده ایجاد می‌شود؟

۲ـ موقعیت نیروهای متمرکز هنگامی که در تیر لنگر حداکثر ایجاد می‌شود کدام است؟

جواب به‌سؤال یک اغلب با روش آزمون و خطا تعیین می‌گردد. در صورتی که پاسخ به‌سؤال دوم با تحلیل تیر میسر خواهد بود. اینک فرض نمایید در تیر نشان داده شده در شکل ۴ـ۲۲ حداکثر لنگر زنده در نقطهٔ اثر نیروی $B$ رخ می‌دهد. هرگاه فاصلهٔ نیروی $B$ از محور تقارن تیر سادهٔ $x$ فرض شود و فاصلهٔ نیروی $B$ از نیروی $R$ که منتجهٔ نیروهای $A$، $B$، $C$ و $D$ می‌باشد، مساوی $d$ باشد، کمیت $x$ را باید طوری تعیین نماییم که لنگر در نقطهٔ $B$ حداکثر گردد.

مقدار $A_V$ را می‌توان به‌سهولت با گرفتن لنگر نسبت به‌نقطهٔ $B$ و با در نظر گرفتن نیروی منتجهٔ $R$ در عوض نیروهای متمرکز $A$، $B$، $C$ و $D$ مطابق زیر محاسبه نمود.

$$A_V = \frac{R\left(\frac{L}{2}+x-d\right)}{L} = \frac{R}{2} + \frac{Rx}{L} - \frac{Rd}{L}$$




شکل ۴ـ۲۲



Scanned by CamScanner

هرگاه لنگر در نقطهٔ اثر نیروی $B$ با $M_B$ نشان داده شود، خواهیم داشت:

$$M_B = A_V\left(\frac{L}{2}-x\right)-Aa=\left(\frac{R}{2}+\frac{Rx}{L}-\frac{Rd}{L}\right)\left(\frac{L}{2}-x\right)-Aa$$

$$=\frac{RL}{4}-\frac{Rd}{2}-\frac{Rx^2}{L}+\frac{Rxd}{L}-Aa$$

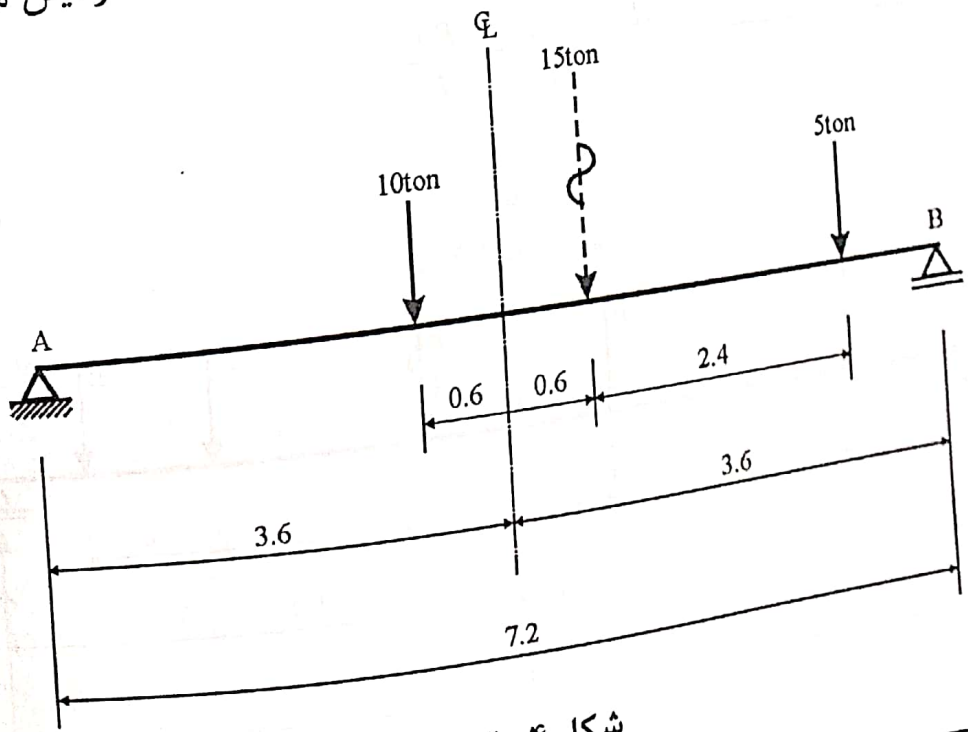
در این صورت برای تعیین حداکثر مقدار $M_B$ می‌توان نوشت:

$$\frac{dM_B}{dx}=-\frac{2Rx}{L}+\frac{Rd}{L}=0$$

که از حل رابطهٔ فوق مقدار $x$ برابر $x=\frac{d}{2}$ به‌دست می‌آید.

بنابراین می‌توان نتیجه‌گیری نمود که حداکثر لنگر در نقطهٔ اثر یکی از سری نیروهای متمرکز مؤثر بر یک تیر ساده، هنگامی رخ می‌دهد که مرکز تیر کاملاً وسط نیروی متمرکز مورد نظر و منتجه نیروهای مؤثر به‌تیر قرار گیرد.

هرگاه فقط دو نیروی متمرکز مورد مطالعه باشد، لنگر حداکثر زنده در نقطهٔ اثر نیروی بزرگتر رخ خواهد داد. چنین موردی در شکل ۴ ـ ۲۳ تشریح گردیده است که در آن فاصلهٔ نیروی ۱۰ تنی از نیروی منتجه $R$ برابر $\frac{5\times3.6}{15}=1.2\text{ m}$ می‌باشد. برای محاسبهٔ لنگر حداکثر ناشی از بار زنده، دو نیروی ۱۰ و ۵ تنی را در موقعیتی در روی تیر ساده در نظر می‌گیریم که مرکز تیر در وسط فاصلهٔ نیروی ۱۰ تنی و نیروی منتجه $R$ قرار گیرد. در این مرحله باید




شکل ۴ ـ ۲۳



Scanned by CamScanner

کنترل شود که آیا دو نیرو بر تیر مؤثر می‌باشند یا نه. در صورتی که یک نیرو از روی تیر خارج شده باشد لنگر حداکثر در وسط تیر هنگامی که نیروی بزرگتر در وسط دهانه می‌باشد ایجاد می‌شود.

لیکن در این مورد ملاحظه می‌شود که دو نیرو بر روی تیر قرار می‌گیرند در نتیجه لنگر حداکثر در نقطهٔ اثر نیروی ۱۰ تنی در موقعیت نشان داده شده ایجاد می‌شود که مقدار آن برابر می‌باشد با:

$$M=\frac{15(3.6-0.6)^2}{7.2}=18.75 \text{ ton.m}$$

در صورتی که بیش از دو نیروی متمرکز زنده وجود داشته باشد، ممکن است به‌سهولت نتوان دریافت که در نقطه اثر کدام نیرو لنگر حداکثر ایجاد می‌شود. در چنین مواردی حداکثر لنگر معمولاً در نقطه اثر نیروی بزرگتری که به‌منتجهٔ نیروها نزدیکتر می‌باشد رخ می‌دهد. به‌هر صورت باید لنگر حداکثر که در نقطه اثر هر یک از نیروها ایجاد می‌شود با روشی که ذکر شد محاسبه‌شده و با هم مقایسه گردند تا لنگر حداکثر تعیین گردد.

## مثال ۴ ـ ۷

پلی به‌دهانهٔ سادهٔ ۱۰ متر مفروض است (شکل مثال ۴ ـ ۷ ـ الف). اگر بار زنده وارد بر این پل مطابق شکل مثال ۴ ـ ۷ ـ ب باشد، مطلوب است تعیین لنگر خمشی حداکثر مطلق تیر.

*حالت اول*: وسط تیر بین برآیند و بار ۲۰ تن سمت چپ قرار دارد.

$$R_A=\frac{10(0.4)+20(2.4)+20(6.4)}{10}=18 \text{ ton}$$

$$M_a=18(3.6)=64.8 \text{ ton.m}$$

*حالت دوم*: وسط تیر بین برآیند و بار ۲۰ تن وسط قرار دارد.

$$R_A=28 \text{ ton}$$

$$M_b=28(5+0.6)-20\times 4=76.8 \text{ton.m}$$

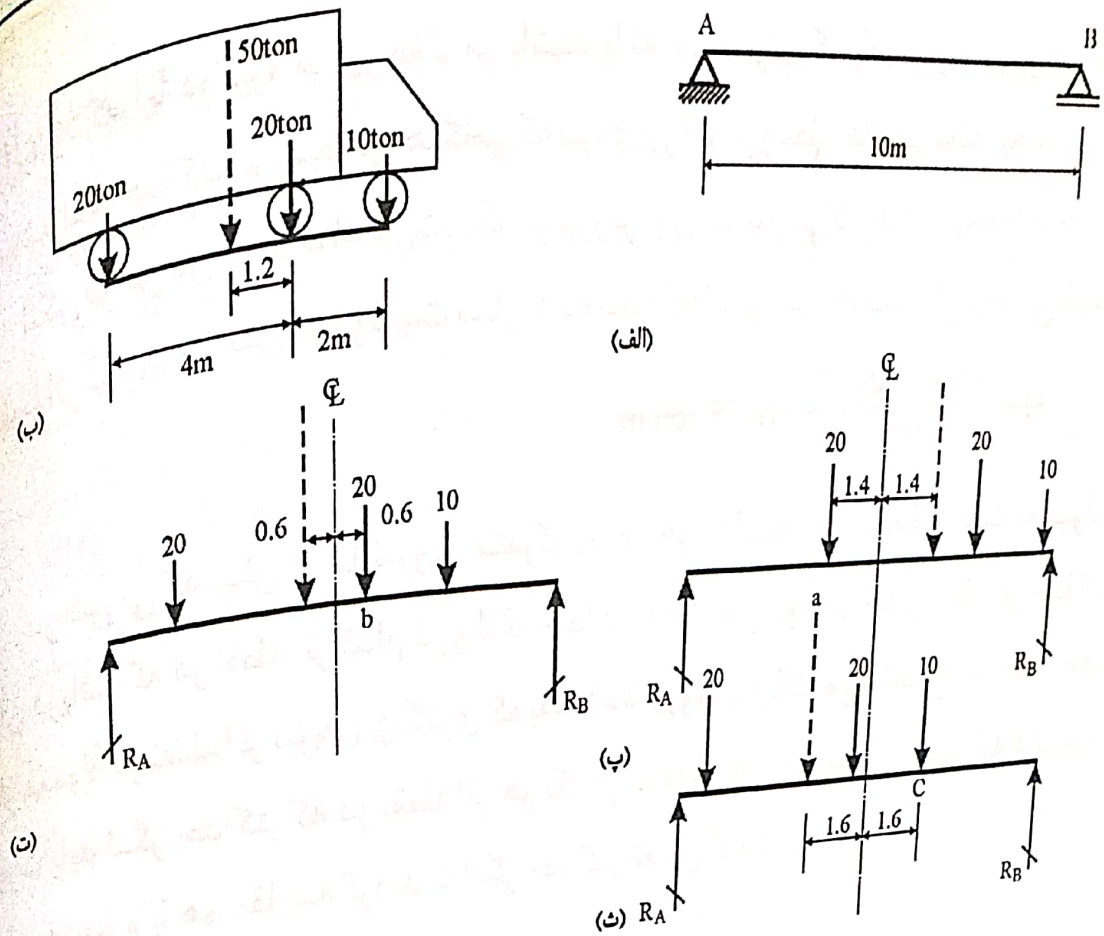
*حالت سوم*: وسط تیر بین برآیند و بار ۱۰ تن قرار دارد.

$$R_B=17 \text{ ton}$$

$$M_c=17(5-1.6)=57.8 \text{ ton.m}$$



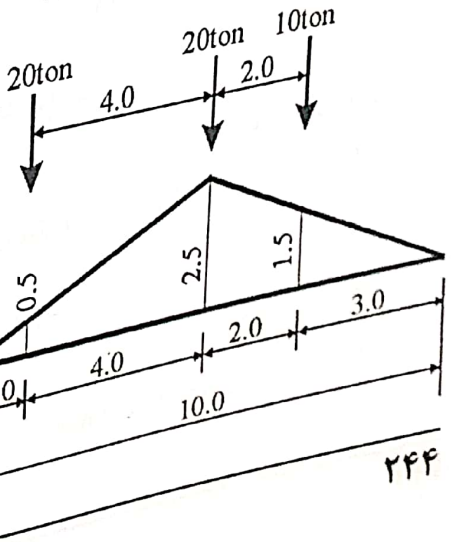
Scanned by CamScanner




**شکل مثال ۴ـ۷**

پس لنگر خمشی حداکثر مطلق، در حالت دوم رخ می‌دهد و مقطع لنگر حداکثر به‌فاصلهٔ 0.6 m از مرکز تیر قرار دارد.

اگر بدون توجه به‌قضیهٔ فوق بخواهیم مسئله را از طریق خط تأثیر حل نماییم، خط تأثیر لنگر خمشی مربوط به‌وسط دهانه رسم‌شده و کامیون در بحرانی‌ترین حالت روی آن قرار داده می‌شود. نتیجهٔ حاصل ۷۵ تن‌متر به‌دست می‌آید که نزدیک $M_b$ می‌شود.




$M_{℄}=20(0.5+2.5)+10 \times 1.5=75$ ton.m



Scanned by CamScanner

مؤثر بر یک تیر ساده، هنگامی رخ می‌دهد که مرکز تیر کاملاً وسط نیروی متمرکز مورد نظر و منتجه نیروهای مؤثر به‌تیر قرار گیرد.

## ۴-۱۵ جداول نیروی برشی و لنگر خمشی حداکثر ناشی از بارگذاری ایران برای دهانه‌های ساده

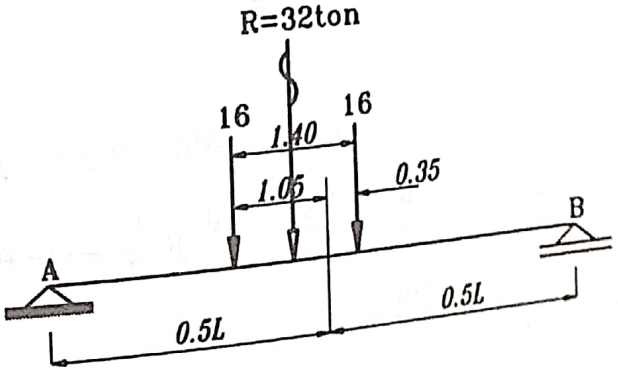
### مقدمه

جداولی که در زیر تدوین می‌شوند، کار محاسباتی مهندس طراح را کاسته و در انتخاب دهانهٔ اقتصادی پل به‌او کمک می‌نمایند. این جداول، عکس‌العمل تکیه‌گاهی، نیروی برشی و لنگر خمشی حداکثر را برای پل‌های ساده با دهانه ۴ الی ۲۰۰ متر ارایه می‌کنند. بارگذاری پل‌ها براساس آیین‌نامهٔ ۱۳۹ سازمان مدیریت و برنامه‌ریزی انتخاب شده است.

### بارگذاری

بارگذاری برای یک خط عبور در سه حالت به‌شرح زیر در نظر گرفته می‌شود:

(الف) **برش و لنگر حداکثر برای یک کامیون ۴۰ تن به‌همراه بار خطی:** برای تعیین لنگر خمشی حداکثر دهانهٔ ساده، بارگذاری دهانه‌ها همانند اشکال ۴-۳۹ تا ۴-۴۱ و برای تعیین نیروی



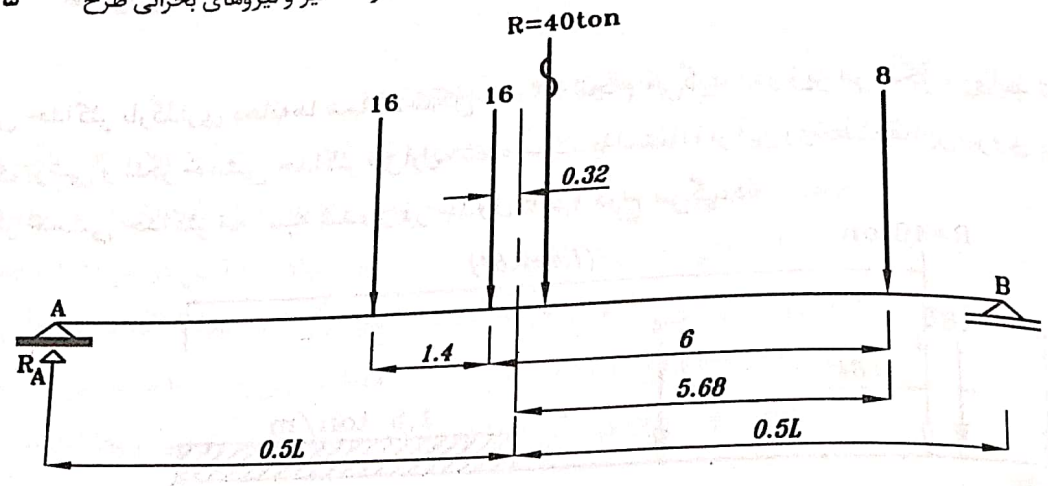

$0.5L<5.68\ m$

$$R_A=32\times\frac{(0.5L+0.35)}{L}$$

$$M_{max}=R_A\,(0.5\,L+0.35)-16\times1.4$$

شکل ۴-۳۹ بار کامیون با دهانه کوچکتر از ۱۰ متر ـ لنگر خمشی حداکثر

Scanned by CamScanner

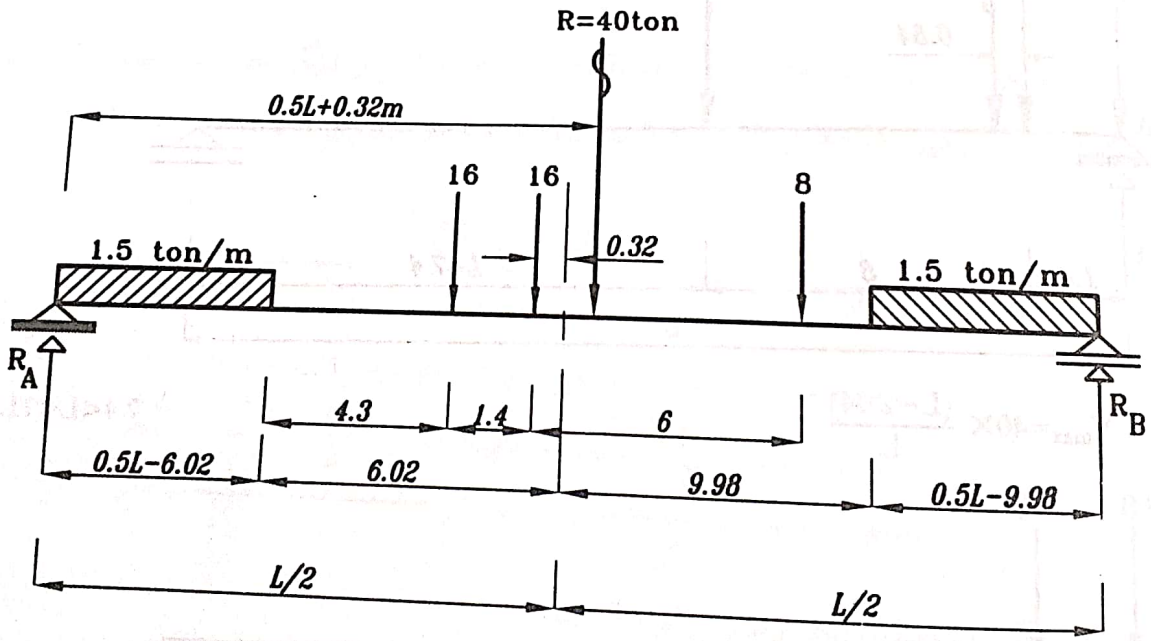



$0.5L>5.68$

$$R_A=\frac{40(0.5L-0.32)}{L}$$

$$M_{max}=R_A(0.5L-0.32)-16\times1.4$$

شکل ۴ ـ ۴۰ بارکامیون با دهانه بزرگتر از ۱۰ و کوچکتر از ۲۰ متر ـ لنگر خمشی حداکثر




$$\frac{L}{2}>9.98$$

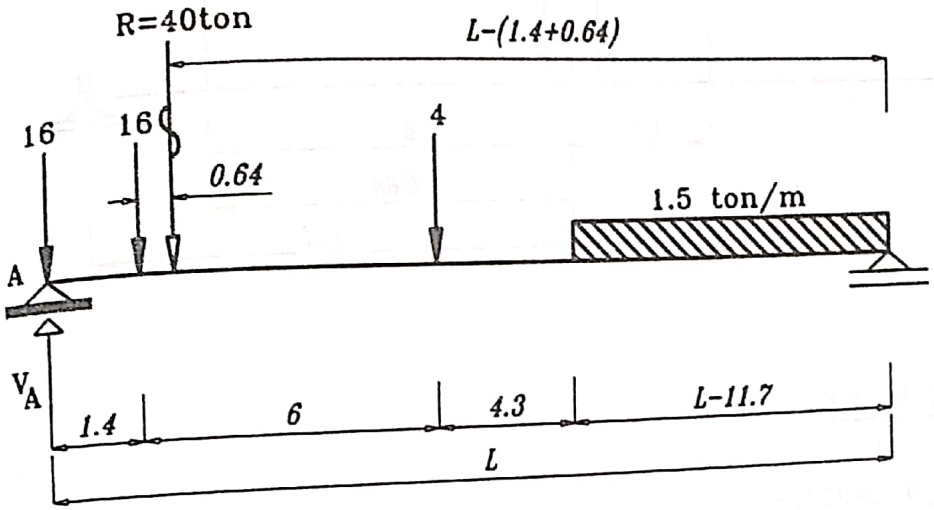
$$M_{max}=R_B(0.5L+0.32)-8\times6-1.5(0.5L-9.98)\left(0.5L+0.32-0.5(0.5L-9.98)\right)$$

$$R_B=\frac{20L+12.8+0.75(0.5L-6.02)^2+1.5L(0.5L-9.98)-0.75(0.5L-9.98)^2}{L}$$

شکل ۴ ـ ۴۱ بارکامیون با دهانه بزرگتر از ۲۰ متر ـ لنگر خمشی حداکثر

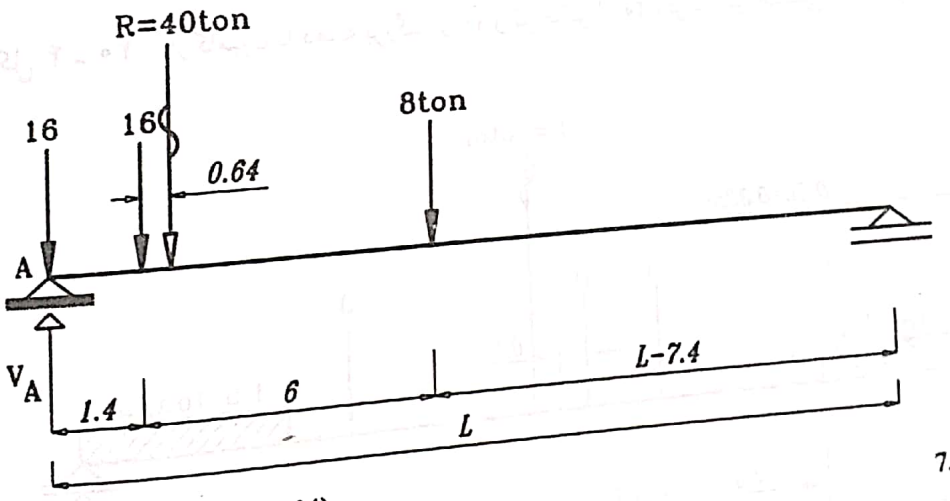
Scanned by CamScanner

برشی حداکثر بارگذاری دهانه‌ها همانند شکل ۴ ـ ۴۲ انجام می‌گردد. در زیر هر شکل، روابط تعیین نیروی برشی و لنگر خمشی حداکثر نیز ارایه شده است. با استفاده از این روابط، مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی حداکثر محاسبه شده و در جدول ۴ ـ ۱ درج می‌گردد.



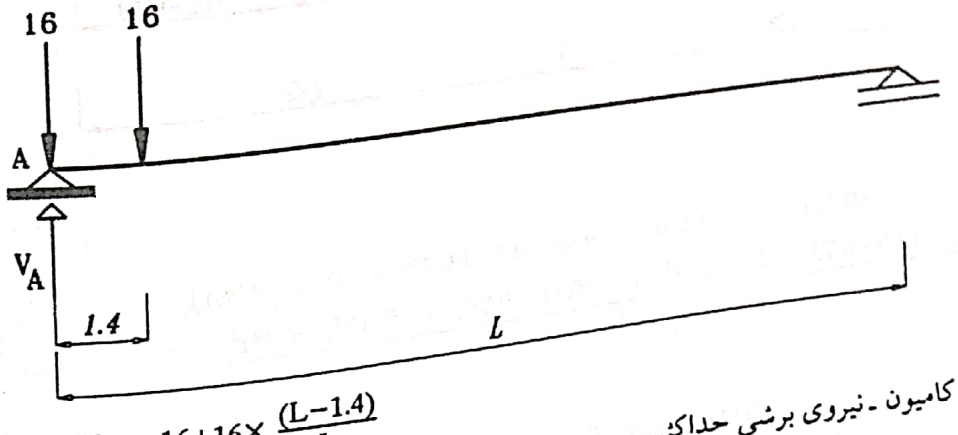

(الف) L>11.7

$$V_{max}=\frac{40(L-2.04)+0.75(L-11.7)^2}{L}\quad 1.5\ \text{ton/m}$$




(ب) 7.4<L<11.7

$$V_{max}=40\times\frac{(L-2.04)}{L}$$




(پ) L<7.4

$$V_{max}=16+16\times\frac{(L-1.4)}{L}$$

شکل ۴ ـ ۴۲ بارکامیون ـ نیروی برشی حداکثر.

Scanned by CamScanner